

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Введение и примеры динамических моделей в экономике</b>	<b>6</b>
1.1. Предварительные сведения о дифференциальных и разностных уравнениях . . . . .	6
1.2. Линейные динамические модели первого порядка . . . . .	12
1.3. Нелинейные динамические модели первого порядка . . . . .	18
1.4. Моделирование уравнениями второго порядка и некоторыми системами уравнений . . . . .	25
<b>Глава 2. Разностные уравнения первого порядка</b>	<b>39</b>
2.1. Общие понятия и элементы качественного анализа . . . . .	39
2.2. Линейные уравнения . . . . .	50
2.3. Паутинообразные модели рынка . . . . .	61
2.3.1. Понятие устойчивости рыночного равновесия . . . . .	61
2.3.2. Паутинообразная модель рынка . . . . .	62
2.3.3. Паутинообразная модель с обучением . . . . .	69
2.4. Однопродуктовая модель Леонтьева . . . . .	71
2.5. Нелинейные уравнения: условия глобальной и локальной устойчивости . . . . .	75
2.5.1. Сжимающие отображения и глобальная устойчивость . . . . .	76
2.5.2. Критерий локальной устойчивости . . . . .	82

2.5.3. Обсуждение . . . . .	86
2.6. Приложение к нелинейным экономическим моделям . . . . .	91
2.6.1. Исследование неоклассической модели Солоу . . . . .	91
2.6.2. Макромодель накопления капитала с акселератором . . . . .	97
2.6.3. Модели делового цикла . . . . .	99
2.6.4. Уравнение Риккера в модели адаптации рыночной цены . . . . .	102
2.6.5. Исследование уравнения Риккера . . . . .	103
2.7. Бифуркация и хаос в динамических моделях . . . . .	106
<b>Глава 3. Дифференциальные уравнения первого порядка</b>	<b>122</b>
3.1. Основные понятия и элементы качественного анализа . . . . .	122
3.1.1. Понятие решения . . . . .	122
3.1.2. Решение начальной задачи и общее решение . . . . .	124
3.1.3. Интегральные кривые. Фазовая прямая . . . . .	126
3.1.4. Дифференциальные уравнения, разрешенные относи- тельно производной . . . . .	128
3.1.5. Неавтономные и автономные дифференциальные урав- нения . . . . .	129
3.1.6. Точки равновесия и устойчивость . . . . .	129
3.1.7. Дополнение о качественных свойствах автономных дифференциальных уравнений . . . . .	134
3.2. Аналитическое решение некоторых типов ДУ первого порядка	139
3.2.1. Интегрирование: сводка основных понятий и формул	139
3.2.2. Простейшие ДУ . . . . .	142
3.2.3. Линейные уравнения . . . . .	144
3.2.4. Уравнения Бернулли и Риккати . . . . .	152
3.2.5. ДУ с разделяющимися переменными . . . . .	154

3.3. Динамика финансового актива . . . . .	171
3.4. Логистическое уравнение и связанные с ним модели . . . . .	179
3.4.1. Исследование свойств решений . . . . .	179
3.4.2. Модификации модели . . . . .	183
<b>Литература</b>	<b>190</b>

## Предисловие

Современные базовые курсы математики для экономистов строятся на последовательном изучении методов анализа *статических моделей*, включающих основы математического анализа, линейной алгебры и оптимизации, а заканчиваются методами анализа *динамических моделей*. *Динамика* в трактовке математической экономики представляет собой довольно обширный раздел математики, позволяющий описывать и исследовать развивающиеся во времени социально-экономические процессы с помощью так называемых *разностных и дифференциальных уравнений и систем* таких уравнений.

Между тем, доступная российским студентам-экономистам учебная литература ограничивается изложением методов решения простейших дифференциальных уравнений (первого и второго порядков) и, в лучшем случае, — линейными разностными уравнениями (тех же порядков). Для студентов, специализирующихся в области экономической теории, математических методов в экономике, этого явно недостаточно, поскольку в последние три десятилетия акцент в динамике экономических систем явно сместился сторону *качественных методов* анализа динамических моделей. Это смещение тесно связано с осознанием важности *нелинейных моделей* для более адекватного моделирования столь сложных систем, как социально-экономические. Аналитическое решение нелинейных моделей (как дифференциальных, так и, особенно, разностных) может быть найдено в почти исключительных случаях и поэтому на первый план выдвигаются качественные методы и численные эксперименты на компьютере, носящие поисковый, исследовательский характер.

Другое не менее важное обстоятельство — открытие неожиданных эффектов возникновения весьма сложного поведения решений нелинейных динамических моделей, апофеозом которых является так называемый *хаос*, наблюдающийся уже в одномерных разностных уравнениях. Подобные явления не могут игнорироваться при математическом моделировании и заставляют переосмыслить многие парадигмы применения математических методов к анализу экономики (например, доверие к экономическим моделям; см. по этому поводу книгу [6]).

Предлагаемое пособие можно рассматривать в качестве вводного курса "Динамические модели в экономике" для студентов экономических

специальностей вузов. За исключением первой главы, содержащей большое число разноплановых примеров социально-экономических моделей, её содержание ограничено разностными и дифференциальными уравнениями первого порядка с одной переменной состояния (одномерными моделями) с упором на качественные методы (фазовые диаграммы, локальная и глобальная устойчивость точек равновесия, бифуркация, возникновение хаоса в дискретных моделях). Будучи дополнен теорией линейных разностных и дифференциальных уравнений 2-го порядка и анализом двумерных моделей, он вполне может составить цельный семестровый курс объемом в 36 лекционных и 18 (или 36) семинарских часов. В пособие включено большое число задач, многие из которых не тривиальны по постановке вопросов и анализу (в ряде случаев — с помощью численных экспериментов на компьютере, хотя технология численного анализа не затрагивается в пособии). Это обстоятельство делает изложение практически замкнутым. Список литературы минимален и продиктован требованием доступности; многие прекрасные учебники по дифференциальным уравнениям могли бы его расширить, но, что касается разностных, то такое расширение проблематично.

# Глава 1

## Введение и примеры динамических моделей

### В ЭКОНОМИКЕ

Развивающиеся во времени процессы принято называть *динамическими*, равно как и описывающие их математические модели. Все переменные в динамических моделях в общем случае зависят от времени ( $t$ ), которое выступает в качестве независимой переменной. Различают динамические модели с дискретным и непрерывным временем, т.е. *дискретные* и *непрерывные модели*. С математической точки зрения дискретные модели описываются так называемыми *разностными уравнениями* и *системами*, а непрерывные — *дифференциальными уравнениями* и *системами*. Мы начнем с неформального знакомства с такими уравнениями и связями между ними.

### 1.1. Предварительные сведения о дифференциальных и разностных уравнениях

Нам будет удобно разбить изложение на микропункты.

1. *Дифференциальными* называют уравнения, которые содержат неизвестную функцию и некоторые ее производные. При этом, если неизвестная функция зависит от скалярного аргумента, то дифференциальное уравнение называют *обыкновенным*, а если от нескольких переменных, то — *дифференциальным уравнением в частных производных*. В дальнейшем мы будем иметь дело только с обыкновенными дифференциальными уравнениями, не оговаривая это особо.

*Порядком* дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной неизвестной функции, которая входит в данное уравнение. Таким образом, бывают дифференциальные уравнения 1-го, 2-го и вообще произвольного  $n$ -го порядка.

Обозначим через  $t$  независимую переменную и будем интерпретировать ее как непрерывно изменяющееся время. Неизвестную функцию обозначим через  $y(t)$ , а ее производные — обычными символами

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad y''(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Используя эти обозначения, приведем следующие примеры дифференциальных уравнений (аргумент  $t$  у функции  $y(t)$  для краткости опускаем):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y' = t - 1; & \text{г) } y'' = 1 - 2t; \\ \text{б) } y' = 0.2ty + 3; & \text{д) } y'' + 2y = 0; \\ \text{в) } y' = y^2; & \text{е) } (y'')^3 - t^2y = \sin t. \end{array} \quad (1.1)$$

Здесь в левом столбце выписаны дифференциальные уравнения 1-го порядка, а в правом — 2-го. Некоторые из них не содержат явно независимой переменной ( $t$ ) и их называют *автономными* (это уравнения в), д)); остальные уравнения являются *неавтономными*.

*Решением* дифференциального уравнения  $n$ -го порядка на некотором промежутке  $I$  называют любую функцию, которая:

- а) определена на  $I$  ;
- б) имеет на  $I$  все производные до порядка  $n$  включительно;
- в) подстановка которой (вместе с производными) в данное уравнение приводит к тождеству (на промежутке  $I$ ) .

Например, уравнения а), г) являются столь элементарными, что их общие решения находятся без знания специальных методов обычным интегрированием:

для а) — это

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - t + C, \quad (1.2)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ , а  $C$  — произвольная постоянная;

для г) —

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2, \quad (1.3)$$

где  $t \in R$ , а  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные (правая часть в г) проинтегрирована дважды). Таким образом, эти уравнения имеют бесчисленное множество *частных решений*, соответствующих различным произвольным постоянным.

Существование бесчисленного множества решений у дифференциальных (и разностных) уравнений — это типичное свойство. Поэтому для выделения частных решений, представляющих интерес, требуется задание дополнительных условий. Наиболее важными являются так называемые *начальные условия*, которые для уравнений 1-го порядка имеют вид

$$y(t_0) = y_0,$$

где  $t_0, y_0$  — заданные числа, а для дифференциальных уравнений 2-го порядка —

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1,$$

(требуется два условия — для функции и ее производной).

Например, если в (1.1) уравнение а) рассмотреть с начальным условием  $y_0 = 0$ , то из общего решения (1.2) находится соответствующее значение  $C = 0$  и решение *начальной задачи*  $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t$ . Аналогично, решение уравнения г) с начальными условиями  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  выделяется из общего решения (1.3) и имеет вид  $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + t$  ( $C_1 = 1, C_2 = 0$ ).

2. *Разностными* называют уравнения, которые содержат значения неизвестной функции *целочисленного аргумента*, относящиеся к различным периодам времени (если, конечно, в качестве аргумента выступает дискретно меняющееся время  $t = 0, 1, 2, \dots$ ). *Порядком* разностного уравнения называют наибольшую разность между номерами периодов, с которыми неизвестная функция входит в данное уравнение.

Например, разностное уравнение

$$y(t+1) = 2y(t) - \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

имеет первый порядок, а уравнение

$$y(t+2) - 2y(t) = 6 \tag{1.5}$$

— второй.



*Решение* разностного уравнения можно рассматривать как числовую последовательность  $\{y(t)\}$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , которая удовлетворяет данному уравнению. Для выделения конкретного, частного решения разностного уравнения задаются *начальные условия*, число которых совпадает с порядком уравнения. Обычно эти условия — значения неизвестной последовательности в ряде первых периодов: для уравнения 1-го порядка начальные условия имеют вид  $y(0) = y_0$ , для 2-го порядка —  $y(0) = y_0$ ,  $y(1) = y_1$ , — и т.д.

С некоторыми приемами нахождения решений простейших разностных уравнений 1-го порядка читатель, вероятно, уже знаком по теории последовательностей (см., например, [3]). С их помощью можно найти общее решение уравнения (1.4)

$$y(t) = \frac{1}{2} + \left(C - \frac{1}{2}\right) 2^t, \quad C = y_0,$$

а что же касается уравнения (1.5), то для него

$$y(t) = C_1(\sqrt{2})^t + C_2(-\sqrt{2})^t - 6, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где постоянные находятся из начальных данных. (Проверьте подстановкой в уравнение.)

Часто (особенно в экономических моделях) используются упрощенные обозначения для неизвестных решений (последовательностей) разностных уравнений —  $y_t$  вместо  $y(t)$  или, — переходя к привычному обозначению последовательностей, —  $y_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

3. Дифференциальные уравнения можно рассматривать как предел разностных, а разностные часто (но не всегда!) получаются из дифференциальных путем *дискретизации времени*.

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(t, y), \tag{1.6}$$

где  $f(t, y)$  — заданная функция. Зафиксируем достаточно малое число  $h > 0$ , называемое *шагом дискретизации* (или квантования времени), и заменим в (1.6) производную  $y'$  разностным отношением

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} . \tag{1.7}$$

В результате получим равенство  $\Delta y/\Delta t = f(t, y)$ , где  $\Delta t = h$ , т.е.

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)). \quad (1.8)$$

Оно фактически является разностным уравнением 1-го порядка, соответствующим (1.6). Из него, зная  $y(t_0)$ , можно найти  $y(t_0+h)$ , по нему  $y(t_0+2h)$  и т.д. Обратное, при  $h \rightarrow 0$  уравнение (1.8) переходит в дифференциальное уравнение (1.6). Поэтому неудивительно, что каждое решение последнего определяется заданием функции в начальный момент.

Рассмотрим теперь общее дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(t, y, y'). \quad (1.9)$$

Заменив в нем  $y'$  разностным отношением (1.7), а вторую производную  $y''$  — вторым разностным отношением

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} = \frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}, \quad (1.10)$$

получим соответствующее (1.9) разностное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta t)^2} = f\left(t, y, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right),$$

т.е.

$$\frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2} = f\left(t, y, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right). \quad (1.11)$$

Зная значения  $y$  в два разделенных интервалом  $h$  момента времени, мы можем найти из этого уравнения значения  $y$  еще через время  $h$ . Следовательно, все значения  $y(t_0 + nh)$  определяются двумя первыми из них.

При  $h \rightarrow 0$  разностное уравнение (1.11) переходит в дифференциальное уравнение (1.9) (убедитесь в этом!). Поэтому неудивительно, что решение дифференциального уравнения 2-го порядка также определяется заданием в начальный момент двух чисел (и  $n$  чисел для уравнения  $n$ -го порядка).

Конечно, не все разностные уравнения 2-го порядка допускают преобразование к виду (1.11) и, следовательно, не все разностные уравнения имеют свои точные дифференциальные аналоги. Например, знаменитая *последовательность чисел Фибоначчи*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

подчиняется разностному уравнению 2-го порядка

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (1.12)$$

которое нельзя свести к дифференциальному путем какого-либо предельного перехода. Между тем оно удивительным образом возникает в фантастическом числе приложений.

Обратим также внимание на следующее обстоятельство: если в уравнении (1.6) приближенная замена первой производной разностным отношением (1.7) вполне естественна (в силу определения производной), то в уравнении (1.9) аппроксимация второй производной разностным отношением (1.10) отнюдь не столь однозначна — можно предложить и другие аппроксимации. Формально все они также приведут к разностным уравнениям 2-го порядка, но может оказаться, что эти уравнения имеют различные свойства решений (из-за чувствительности к изменению “коэффициентов”, возникающих при аппроксимации). Отметим также, что в случае уравнений первого порядка при аппроксимации (1.7) траектория разностного уравнения (1.8) состоит из точек на траектории дифференциального уравнения (1.6), соответствующих моментам дискретизации времени (рис.1.1). В случае уравнений 2-го порядка такое свойство в общем случае гарантировать невозможно.

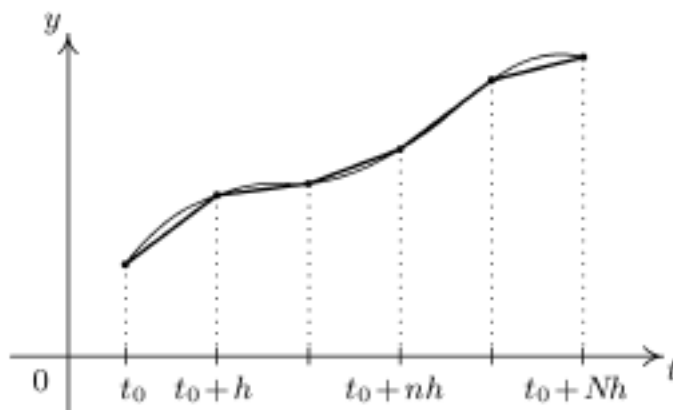


Рис.1.1. Траектория дифференциального уравнения 1-го порядка и ее разностная аппроксимация (ломаная Эйлера)

## 1.2. Линейные динамические модели первого порядка

Мы начнем с примеров моделей, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка вида

$$y' = ay + b, \quad (1.13)$$

или их разностными аналогами

$$y(t + 1) = ay(t) + b. \quad (1.14)$$

Здесь  $a, b$  — некоторые постоянные или известные функции времени.

При  $b = 0$  уравнения (1.13), (1.14) называются *однородными*. В этом случае первое из них можно переписать в виде  $y'/y = a$ , откуда ясно, что оно описывает динамику переменной  $y(t)$ , которая имеет *постоянный темп прироста*  $a$ , или же зависящий только от времени (не зависит от  $y$ ). Поэтому  $a$  часто называют коэффициентом роста, допуская некоторую неточность.

Исторически данное однородное уравнение в социально-экономической сфере впервые появилось в работах Т. Мальтуса (1763—1834), который исследовал динамику населения Земли. Поскольку при начальном условии  $y(0) = y_0$  и постоянном  $a$  это уравнение имеет экспоненциальное решение  $y(t) = y_0 e^{at}$  (очень быстро возрастающее при  $a > 0$ ), то Мальтус сделал пессимистические выводы о неминуемом наступлении голода: природные ресурсы ограничены, а при  $a > 0$  население неограниченно растет. В действительности более адекватные модели популяций должны учитывать механизмы саморегуляции, что приводит к совершенно другим, нелинейным моделям (см. п.1.3).

На рис.1.2 приведены графики решений уравнения  $y' = ay$  при различных начальных условиях и знаках коэффициента роста.

Отметим, что разностное уравнение (1.14) при  $b = 0$  можно записать в виде  $y(t + 1)/y(t) = a$ ; отсюда ясно, что оно описывает процесс с постоянным темпом роста, или же зависящим только от времени (если  $a = a(t)$ ).

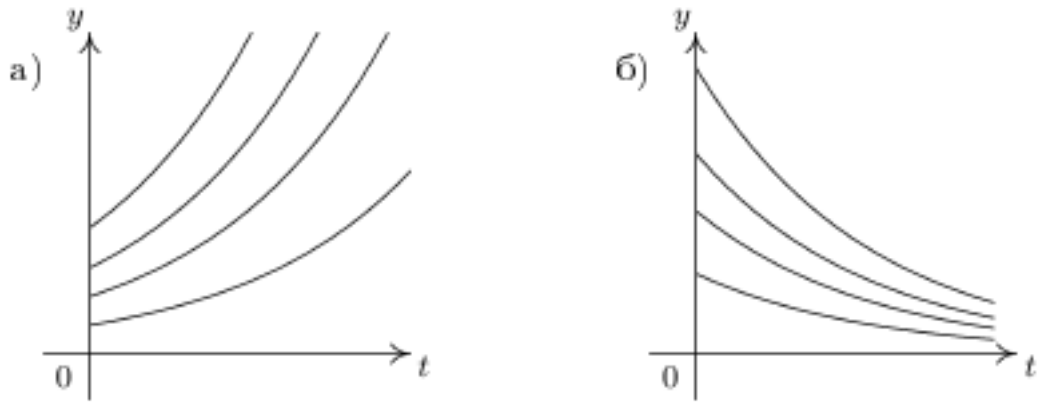


Рис.1.2. Графики решений уравнения  $y' = ay$ : а)  $a > 0$  — экспоненциальный рост; б)  $a < 0$  — экспоненциальное снижение.

Перейдем к другим моделям этого типа, начав с элементарного — описания динамики банковского вклада.

**Пример 1.1.** *Динамика банковского вклада.* Предположим, что инвестор положил в банк денежную сумму  $S_0$  по годовой ставке  $r$ . Значение  $S(t)$  наращенной суммы вклада через  $t$  лет зависит от частоты начисления процентов.

Если проценты начисляются раз в год, то сумма  $S(t)$  будет вычисляться по рекуррентной формуле сложных процентов

$$S(t + 1) = (1 + r)S(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Это разностное уравнение 1-го порядка с шагом по времени, равном году, и начальным условием  $S(0) = S_0$ . Ясно, что уравнение (1.15) задает геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = 1 + r$  и потому его решение легко находится: в конце года  $t$  вклад составит

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

Предположим теперь, что те же  $r$  годовых процентов начисляются дважды в год ( $r$  - номинальная процентная ставка). Тогда новое разностное уравнение будет иметь вид:

$$S(t + 1) = \left(1 + \frac{r}{2}\right) S(t),$$

причем шаг по времени становится равным полугоду, так что  $t = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  (кратно  $1/2$ ). Легко понять, что решение будет иметь вид

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t},$$

где слева стоит наращенная сумма через  $t$  лет.

Вообще, если проценты начисляются  $m$  раз в год, то динамика вклада будет описываться уравнением с шагом по времени  $1/m$ :

$$S(t+1) = \left(1 + \frac{r}{m}\right) S(t), \quad (1.16)$$

где  $t = 0, 1/m, 2/m, \dots$  (кратно  $1/m$ ). Явное выражение наращенной суммы через  $t$  лет – решение уравнения (1.16) – представляет собой формулу сложных процентов при  $m$ -кратном начислении:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \quad (1.17)$$

Допустим теперь, что банк, желая расшевелить вкладчиков, предлагает непрерывное начисление процентов. Тогда проценты добавляются к текущему вкладу в каждый момент и разностное уравнение не годится. Чтобы разобраться с ситуацией, имеются две возможности.

Во-первых, можно заметить, что непрерывное начисление соответствует случаю  $m \rightarrow \infty$  и получить искомую сумму предельным переходом в известном решении (1.17) для случая  $m$ -кратного начисления:

$$S(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}, \quad (1.18)$$

(объясните второе равенство).

Во-вторых, можно перейти к пределу в разностном уравнении (1.16). Для этого обозначим через  $h = 1/m$  шаг дискретизации (тогда  $h \rightarrow 0$ , когда  $m \rightarrow \infty$ ) и перепишем уравнение (1.16) в виде

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = rS(t).$$

При  $m \rightarrow \infty$ , т.е. при  $h \rightarrow 0$ , левая часть стремится к производной  $dS/dt$ , а правая остается неизменной, так как вообще не зависит от  $h$ . Поэтому предельный переход дает равенство

$$\frac{dS(t)}{dt} = rS(t) \quad \text{или, кратко,} \quad S' = rS. \quad (1.19)$$

Получили дифференциальное уравнение, которое описывает динамику вклада при непрерывном начислении процентов.

По существу обе использованные возможности в данном случае совпадают, поскольку легко проверяется, что функция  $S(t)$ , определенная формулой (1.18), является решением уравнения (1.19), причем естественное начальное условие  $S(0) = S_0$  выполнено.

Для наглядности приведем числовые данные (значения коэффициента наращивания  $\eta(t) = S(t)/S_0$ ), которые показывают влияние кратности начисления процентов на динамику наращенной суммы при  $r = 8\%$  (т.е.  $r = 0.08$ ).

Таблица 1.1. Рост капитала при  $r = 0.08$

Годы ( $t$ )	Коэффициент наращивания $\eta(t)$		
	$m = 4$	$m = 366$	$m = \infty$
1	1.0824	1.0833	1.0833
2	1.1716	1.1735	1.1735
5	1.4859	1.4918	1.4918
10	2.2080	2.2253	2.2255
20	4.8754	4.9522	4.9530
30	10.7652	11.0202	11.0232
40	23.7699	24.5238	24.5325

Данные свидетельствуют, что способ начисления процентов оказывает незначительное влияние на рост суммы. Например, за 10 лет при  $S_0 = 1000$  наращенная сумма вклада при непрерывном начислении превзойдет этот показатель при ежеквартальном начислении всего на 17,5 ден.ед., т.е. меньше, чем на 2 ден.ед. в год. Конечно, с ростом  $r$  разница становится все более ощутимой.

В рассмотренном примере содержались как разностное уравнение, так и дифференциальное, причем одно переходило в другое, когда шаг дискретизации стремился к нулю. Это довольно типичная ситуация, но все же не правило: от дифференциального уравнения всегда можно перейти к разностному, но, как мы уже знаем, имеются разностные уравнения, которые не имеют дифференциальных аналогов (см. конец п.1.1) .

**Пример 1.2.** *Активный инвестор.* Предыдущий пример был упрощен, поскольку, однажды инвестировав, вкладчик не совершал более никаких операций с вкладом. Активный инвестор может пополнять вклад или, напротив, реинвестировать часть вклада (например для текущего потребления).

Изменения, которые нужно внести в рассмотренные модели для описания данной ситуации, достаточно очевидны.

Если обозначить через  $c(t)$  денежную сумму, которую инвестор дополнительно вкладывает в банк в период  $t$  дискретной модели, то разностное уравнение (1.15) модифицируется следующим образом

$$S(t+1) = (1+r)S(t) + c(t). \quad (1.20)$$

Чтобы охватить случай снятия средств с вклада, можно допускать для экзогенной переменной  $c(t)$  и отрицательные значения.

Прежде, чем написать соответствующий непрерывный аналог, отметим, что в (1.20) переменная  $c(t)$  имеет смысл потока – ее размерность есть “деньги/время”. Так же обстоит дело и в непрерывной модели:  $c(t)$  представляет собой поток средств, непрерывно присоединяемых к текущему вкладу, если  $c(t) > 0$ , или отчисляемых с него, если  $c(t) < 0$  (все это особенно наглядно в случае  $c(t) = c = const$ ). Поэтому дифференциальное уравнение активного инвестора примет вид

$$S'(t) = rS(t) + c(t). \quad (1.21)$$

(сравните размерности левой и правой частей равенства).

Отметим, что найти решения уравнений (1.20), (1.21) с заданным начальным условием  $S(0) = S_0$  можно только при известной стратегии инвестора  $c(t)$ . Именно поэтому эта переменная была названа выше экзогенной.

В случае  $c(t) = c = const$  решение разностного уравнения (1.20) читатель может найти, пользуясь известным приемом перехода от неявного способа задания числовой последовательности к явному. Совершенно аналогичная схема применима и к дифференциальному уравнению (1.21), и для самопроверки мы выпишем его решение

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{c}{r} (e^{rt} - 1).$$



**Пример 1.3.** *Динамическое бюджетное ограничение потребителя.* Развивая пример 1.2, представим себе потребителя, доход которого складывается из текущей заработной платы  $w(t)$  и процентов с вложенного капитала, а расходы – из текущего потребления  $c(t)$  и инвестирования – накопления капитала (для связи с вышеизложенным обозначим капитал через  $S(t)$ ).

В непрерывном описании данной ситуации нужно учесть, что прирост капитала совпадает с производной  $S'(t)$  и записать баланс доходов и расходов:

$$\underbrace{w(t) + rS(t)}_{\text{доходы}} = \underbrace{c(t) + S'(t)}_{\text{расходы}} .$$

Это равенство и представляет собой бюджетное ограничение потребителя. Разрешив его относительно производной  $S'$ , приходим к дифференциальному уравнению 1-го порядка в стандартной форме

$$S'(t) = rS(t) + w(t) - c(t). \quad (1.22)$$

В этой модели  $w(t)$ ,  $c(t)$  являются экзогенными переменными.

Разностный аналог этой модели предоставляем выписать читателю.

Динамическое бюджетное ограничение возникает, например, в микроэкономической модели оптимального поведения потребителя И.Фишера и в ее обобщениях.

**Пример 1.4.** *Модель гиперинфляции Кейгана.* Эта модель, предложенная Ф. Кейганом в 1956 г., описывает процесс гиперинфляции (динамику уровня цен) под влиянием инфляционных ожиданий экономических агентов.

Основу модели составляют следующие уравнения:

- функция спроса на деньги

$$\frac{M_d}{P} = e^{-\alpha\pi}, \quad (1.23)$$

где  $P$  – фактический уровень цен (например, дефлятор ВВП),  $\pi$  – ожидаемый темп инфляции,  $\alpha > 0$  – эластичность денежного спроса;

- дифференциальное уравнение адаптации инфляционных ожиданий

$$\pi' = \beta \left( \frac{P'}{P} - \pi \right), \quad (1.24)$$

где  $\beta > 0$  – параметр адаптации, а  $P'/P$  – фактический темп инфляции. Таким образом, в модели Кейгана влияние на инфляцию реального сектора, ставки процента и т.д. считаются второстепенными, причем ожидаемый темп инфляции растет, если фактический темп инфляции превышает ожидаемый (тогда  $\pi' > 0$ ), и снижается в противном случае.

Модель удобно представить в новых логарифмических переменных

$$m_d = \ln M_d, \quad p = \ln P.$$

Тогда уравнения модели примут следующий линейный вид

$$\begin{aligned} m_d - p &= -\alpha\pi, \\ \pi' &= \beta(p' - \pi), \end{aligned} \tag{1.25}$$

причем первое из них является конечным, а второе дифференциальным.

При  $M_d = const$  (тогда и  $m_d = const$ ) можно исключить  $p$  путем дифференцирования по  $t$  конечного уравнения. Это дает равенство  $p' = \alpha\pi'$ , и, после подстановки его во второе уравнение, получим простое линейное уравнение

$$\pi' = \gamma\pi, \quad \text{где } \gamma = \frac{\beta}{\alpha\beta - 1}.$$

Его решение с начальным условием  $\pi(0) = \pi_0$  выражается через экспоненту –

$$\pi(t) = \pi_0 e^{\gamma t}$$

и, следовательно, инфляционные ожидания снижаются, если  $\gamma < 0$ , т.е. при  $\alpha\beta < 1$  (тогда  $\pi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

### 1.3. Нелинейные динамические модели первого порядка

Возможности использования линейных моделей 1-го порядка ограничены, поскольку решения в этих моделях ведут себя довольно бесхитростно. В этом смысле нелинейные модели являются гораздо более гибкими.

Обзор нелинейных моделей мы начнем с так называемого *логистического уравнения*, которое в непрерывном времени имеет вид

$$y' = ay - by^2, \tag{1.26}$$

а в дискретном

$$y(t + 1) = ay(t) - by^2(t), \quad (1.27)$$

где  $a, b > 0$  – некоторые параметры.

Логистическое уравнение возникает в невероятно большом числе ситуаций. Это объясняется, по-видимому, интересными свойствами его решений (как в непрерывном, так и – особенно – в дискретном случае).

Уравнения типа (1.26) или (1.27) часто называют моделью Ферхюльсте-Пирла по имени ученых, предложивших его в качестве альтернативы к "жесткой" модели Мальтуса для описания динамики биологической популяции.

Переписав их в виде

$$\frac{y'}{y} = a - by, \quad \frac{y(t + 1)}{y(t)} = a - by(t),$$

можно заметить, что в непрерывной модели (1.26) темп прироста линейно убывает по  $y$ , а в дискретной так же ведет себя темп роста (т.е., они уже не являются постоянными, как у Мальтуса). При малых значениях  $y$  главным членом в уравнениях (1.26), (1.27) является  $ay$ , так что при таких  $y$  решения этих уравнений ведут себя подобно мальтузианским, но с ростом  $y$  начинают превалировать вторые слагаемые – вступают в действие процессы саморегуляции и лимитирования; чем больше значение  $y$ , тем сильнее действуют лимитирующие факторы.

Отметим, что все модификации модели Мальтуса, приводящие к более "мягким" моделям, связаны с моделированием коэффициента прироста зависимостью

$$\frac{y'}{y} = \varphi(y), \quad \text{т.е.} \quad y' = \varphi(y)y,$$

где  $\varphi(y) \approx a > 0$  при малых  $y$ , является убывающей функцией и  $\varphi(y) < 0$ , когда  $y$  достаточно велико.

**Пример 1.5.** *Банковский вклад при убывающей процентной ставке.* Предположим, что некоторый политик или финансовый "гений" заметил, что с ростом времени сумма банковского вклада неограниченно возрастает (пример 1.1) и, желая воспрепятствовать беспредельному обогащению,

предложил, чтобы процентная ставка уменьшалась пропорционально текущей сумме вклада. Это означает, что в динамических моделях (1.15), (1.19) коэффициент роста  $r$  надо заменить на

$$r \left( 1 - \frac{S(t)}{S_{max}} \right),$$

что приводит к логистическим уравнениям вида

$$S(t+1) = \left[ 1 + r \left( 1 - \frac{S(t)}{S_{max}} \right) \right] S(t), \quad (1.28)$$

$$S' = r \left( 1 - \frac{S}{S_{max}} \right) S, \quad (1.29)$$

где  $S_{max}$  – параметр.

Казалось бы, что, благодаря механизму обратной связи (ставка зависит от суммы), решения уравнений (1.28), (1.29) и численность популяции в аналогичных моделях (1.26), (1.27) должны как-то стабилизироваться со временем. Как мы увидим далее, в непрерывной логистической модели дело обстоит именно так, но в дискретной модели возникают поразительные эффекты: при изменении параметров  $r$ ,  $S_{max}$  поведение решений может резко меняться или, как принято говорить, происходит бифуркация; с ростом  $r$  оно и вовсе становится хаотическим (чрезвычайно сложным при  $t \rightarrow \infty$ ) и даже на сегодня малоизученным.

Этот факт показывает, что аналогичные между собой дифференциальные и разностные уравнения могут иметь существенно различающееся поведение решений. Данное обстоятельство нужно учитывать при построении моделей различных систем.

**Пример 1.6.** *Логистическое уравнение и эффективность рекламы.* Пусть переменная  $y$  означает долю населения города или региона, которое информировано через рекламу о товаре фирмы. Прирост этой части населения зависит от интенсивности обмена информацией между этой частью населения и потенциально еще возможной (т.е.  $1 - y$ ) Это соображение формализуется уравнением

$$y' = ay(1 - y)$$

в непрерывном времени и уравнением

$$y(t+1) = y(t) + ay(t)(1 - y(t))$$

в дискретном. Здесь параметр  $a > 0$  характеризует интенсивность обмена информацией; в частности он может зависеть от расходов фирмы на рекламу.

Если принять во внимание "забывание" покупателей о рекламе товара, то можно модифицировать приведенные уравнения путем добавления в правые части слагаемого  $(-cy)$ , где  $c > 0$  – коэффициент "забывания".

**Пример 1.7.** *Логистическое уравнение спроса.* Для построения функции спроса от дохода  $D = D(I)$  естественно принять следующие гипотезы о свойствах коэффициента эластичности этой функции, т.е. показателя

$$E(D, I) = I \frac{D'(I)}{D(I)} ; \quad (1.30)$$

- а)  $E(D, I) > 0$  поскольку с ростом дохода потребители склонны увеличивать спрос;
- б) частная производная  $E'_D(D, I) < 0$ , так как при постоянном доходе более высокий уровень удовлетворенного спроса влечет уменьшение склонности к потреблению данного блага;
- в)  $E'_I(D, I) > 0$  поскольку при постоянном уровне потребления реакция на изменение дохода тем сильнее, чем выше уровень дохода.

Простейшей зависимостью, которая удовлетворяет гипотезам а)– в), является функция

$$E(D, I) = aI(M - D), \quad (1.31)$$

где  $a, M > 0$ , причем считается, что  $0 < D < M$ , чтобы обеспечить условие  $E > 0$ . Если подставить (1.31) в (1.30), то получим логистическое уравнение

$$\frac{dD}{dI} = aD(M - D), \quad (1.32)$$

где  $D(I)$  – искомая функция, а  $I$  – независимая переменная.

Именно последнее обстоятельство примечательно: данный пример – это один из тех редких случаев, когда в экономике возникает дифференциальное уравнение не динамического характера, поскольку неизвестная функция в (1.32) не зависит от времени.

Бегло укажем еще ряд приложений логистической модели, ограничившись случаем непрерывного времени.

1. Если в модели (1.26) популяция как бы "предоставлена сама себе" (ни с кем не взаимодействует и не подвержена внешним воздействиям), то в модели, учитывающей возможность промысла, надо ввести дополнительную экзогенную переменную  $v$  – интенсивность промысла (число особей, вылавливаемых в единицу времени) – и заменить уравнение (1.26) следующим

$$y' = ay - by^2 - v. \quad (1.33)$$

2. Пусть  $y$  – это величина национального дохода экономики с ограниченными ресурсами, а  $v$  – расходы непроизводственного характера (вооружение, ведение боевых действий и т.д.). Уравнение (1.33) описывает в этой ситуации динамику национального дохода.

3. Пусть нас интересует влияние показателя благосостояния  $W$  на численность населения. Тогда можно принять, что при модификации модели Мальтуса  $y' = ay$  коэффициент роста не только уменьшается с ростом  $y$ , но и увеличивается с ростом количества благ на душу населения; например, можно заменить  $a$  на  $a - by + cW/y$ , что дает уравнение

$$y' = ay - by^2 + cW.$$

4. Уравнение (1.33) можно использовать для оценки влияния "утечки мозгов" и сокращения финансирования образования и науки. При этом  $y$  – это число квалифицированных специалистов,  $v$  – это интенсивность "утечки мозгов" (эмиграция, переход в бизнес, торговлю и т.д.).

Обратимся теперь к другим наиболее известным в экономике нелинейным моделям первого порядка.

**Пример 1.8.** *Модель адаптации рыночной цены.* Рассмотрим простой рынок товара, который не находится в равновесии. Пусть  $p(t)$  – цена товара в момент  $t$ ,  $D(p)$ ,  $S(p)$  – функции спроса и предложения соответственно,  $z(p) = D(p) - S(p)$  – функция избыточного спроса. Предположим (вслед за Л. Вальрасом), что прирост текущего уровня цены определяется избыточным спросом. В самом общем виде это можно описать дифференциальным уравнением

$$p' = \alpha F(z(p)) \quad (1.34)$$

или же его разностным аналогом

$$p(t+1) = p(t) + \alpha F(z(p(t))).$$

Здесь  $\alpha > 0$  – параметр адаптации, характеризующий скорость реакции цены на дисбаланс рынка, а  $F(z)$  – заданная функция с естественными свойствами  $F(0) = 0$ ,  $F(z) > 0$  при  $z > 0$  и  $F(z) < 0$  при  $z < 0$ . В частности, можно положить  $F = z$  (и тогда при линейных функциях  $D, S$  дифференциальное уравнение (1.34) будет линейным).

Конечно, возможны другие варианты описания приспособления цены к дисбалансу рынка. Например, можно предложить дискретную модель

$$p(t+1) = p(t)e^{\alpha z(p(t))}, \quad \alpha > 0, \quad (1.35)$$

которая даже при линейных функциях  $D, S$  обладает весьма экзотическими свойствами.

**Пример 1.9.** *Макромодель неоклассического роста.* Эта модель является одной из самых "расхожих" в литературе. Она состоит из следующих соотношений для макропеременных (ограничимся дискретной версией и упрощенными обозначениями типа  $y_t$  вместо  $y(t)$ ):

- а)  $Y_t = C_t + I_t$ ,  $Y_t = F(K_t, L_t)$  – условие равновесия и производственная функция;
- б)  $K_{t+1} = K_t + I_t - bK_t = I_t + (1 - b)K_t$ , (1.36)  
– уравнение динамики капитала с нормой амортизации  $b$ ;
- в)  $S_t = I_t = sY_t$  – еще одно условие равновесия и линейная функция инвестиций (сбережений);
- г)  $L_t = (1 + n)^t L_0$  – трудовые ресурсы растут с темпом  $n$ .

Здесь, как обычно,  $Y$  – национальный доход,  $C$  – потребление,  $I$  – инвестиции,  $K$  – капитал,  $L$  – труд,  $S$  – сбережения,  $s$  – склонность к сбережению.

Для математического анализа модель удобно преобразовать, пользуясь обычным свойством положительной однородности производственной функции ( $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \forall \lambda > 0$ ) и переходом к удельным переменным

$$y = \frac{Y}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \quad i = \frac{I}{L}.$$

Вводя функцию

$$f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

преобразуем уравнения (1.36) к следующим (проверьте!)

$$y_t = c_t + i_t, \quad y_t = f(k_t),$$

$$k_{t+1} = \nu[i_t + (1 - b)k_t],$$

где  $\nu = 1/(1 + n)$ . Исключая  $y_t, i_t$  с помощью двух первых уравнений, получим основное уравнение *неоклассического роста*

$$k_{t+1} = \nu[f(k_t) + (1 - b)k_t - c_t], \quad (1.37)$$

в котором среднедушевое потребление  $c_t$  является экзогенной переменной.

Читателю предоставляется проверить, что “перевод” дискретной модели (1.37) на случай непрерывного времени (вместе с предположениями и последующими преобразованиями) приводит к следующему дифференциальному уравнению неоклассического роста

$$\dot{k} = f(k) - (b + n)k - c. \quad (1.38)$$

**Пример 1.10** представляет собой модификацию предыдущей модели, предложенную Р. Дэем в 1982 г. В отличие от неоклассической модели, он использовал нестандартную производственную функцию

$$\frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) = Bk_t^\beta (M - k_t)^\gamma, \quad k_t \leq M,$$

где  $\beta, \gamma, M > 0$ . Подстановка этой функции в (1.37) приводит к нелинейному разностному уравнению, которое при  $\beta = \gamma = 1$  оказывается логистическим.

**Пример 1.11.** *Модель циклического роста Хавельмо.* Эта макромодел ь включает в себя степенную производственную функцию

$$Y = AL^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad A > 0$$

и уравнение динамики занятых в виде дифференциального уравнения

$$\frac{L'}{L} = a - b\frac{L}{Y}.$$



Оно означает, что темп прироста занятых убывает с ростом трудоемкости  $L/Y$ . Подстановка  $Y$  в это равенство дает так называемое *уравнение Бернулли*

$$L' = aL - \frac{b}{A}L^{2-\alpha} . \quad (1.39)$$

Дискретную версию этого уравнения читатель может выписать самостоятельно.

**Пример 1.12.** *Нелинейное бюджетное ограничение потребителя (семья).* Вернемся к примерам 1.2, 1.3 (см. уравнение (1.22) ). В них потребление считалось функцией времени:  $c = c(t)$ . В другой версии принимается, что текущее потребление зависит от достигнутого уровня сбережений, т. е.  $c$  является функцией  $S$ , которая удовлетворяет естественным требованиям (интерпретируйте их):

- а)  $c(S) \geq 0$  при  $S \geq 0$ ;
- б)  $c(S)$  монотонно не убывает;
- в) существует число  $C > 0$  такое, что за единичный период времени потребитель (семья) не может истратить денег больше, чем  $C$ , т.е.

$$\int_t^{t+\theta} c(S(\tau))d\tau \leq C \quad \forall t .$$

Например, такой функцией является

$$c(S) = \frac{A(S + a_1)}{S + a_1 + a_2} , \quad (1.40)$$

где  $A, a_1, a_2$  – положительные параметры (заметим, что  $A = \lim_{S \rightarrow \infty} c(S) = \sup_{S \geq 0} c(S)$ ).

## 1.4. Моделирование уравнениями второго порядка и некоторыми системами уравнений

Нелинейные модели 1-го порядка безусловно интересны, но даже они имеют ограниченный спектр приложений.

Во-первых, ими можно описать не все типы поведения динамических переменных, которые требуются на практике. Например, колебательные процессы самого простого вида – *гармонические* – описываются функцией вида

$$A \cos(at + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $a$  – частота, а  $\varphi$  – угол, называемой начальной фазой. Но такая функция не может быть решением дифференциального уравнения 1-го порядка. Между тем, так называемое уравнение *гармонического осциллятора* 2-го порядка

$$y'' + a^2y = 0$$

имеет указанную функцию в качестве общего решения (проверьте).

Во-вторых, уравнения 1-го порядка позволяют моделировать процессы, состояние которых в каждый момент времени можно характеризовать всего лишь одной существенной переменной или, как принято говорить, одной *фазовой переменной*. Например, в макромодели роста (пример 1.9) формально участвуют несколько экономических переменных, но из них лишь одна – капитал – является существенной фазовой переменной: если динамика капитала известна, то все остальные пересчитываются через нее.

Конечно, реальные моделируемые процессы характеризуются несколькими фазовыми переменными, каждая из которых подчиняется “своему” дифференциальному или разностному уравнению. Эти уравнения связаны между собой и в совокупности образуют систему дифференциальных или разностных уравнений.

Например, если детализировать макромоделю роста на случай экономики с двумя секторами – производства предметов потребления и производства капитальных благ (средств производства), – то в каждом из секторов придется вводить запас капитала (а также труд, инвестиции, производственную функцию и т.д.). В этой ситуации в детализированной неоклассической модели неизбежно появятся два динамических уравнения, т.е. система.

Мы начнем с классических моделей, которые (после предварительных преобразований) сводятся к одному уравнению второго порядка. Сразу заметим, что хотя эти уравнения содержат одну неизвестную функцию

(т.е. одну фазовую переменную), они всегда могут быть сведены к системам из двух уравнений 1-го порядка. Обратное сведение – от системы двух уравнений 1-го порядка к одному уравнению 2-го порядка возможно отнюдь не всегда, но, как будет видно из примеров, во многих интересных приложениях оно все же оказывается реализуемым. Именно поэтому ряд моделей систем включен в данный обзор.

**Пример 1.13.** *Модель экономического цикла Самуэльсона - Хикса.* Пожалуй самой знаменитой дискретной моделью 2-го порядка является модель делового цикла, предложенная А.Хансеном и П.Самуэльсоном в 1939 г., и дополненная Дж.Хиксом в 1950. Впоследствии она получила название модели Самуэльсона - Хикса. Модель состоит из следующих соотношений:

– непроизводственное потребление в текущем периоде  $t$  линейно зависит от дохода предшествующего периода, т.е.

$$C_t = cY_{t-1} + c_0, \quad (1.41)$$

где  $Y$  – доход,  $c$  – предельная склонность к потреблению, а  $c_0$  – его автономная (не зависящая от дохода) составляющая;

– индуцированные инвестиции (зависящие от дохода) пропорциональны изменению дохода в предшествующем периоде, т.е.

$$I_t^{ind} = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \quad (1.42)$$

и это равенство есть математическое выражение принципа акселератора, а  $v > 0$  – параметр, характеризующий реакцию предпринимателей на изменение дохода;

– условие равновесия в каждом периоде

$$Y_t = C_t + I_t, \quad I_t = I_t^{ind} + I_t^a, \quad (1.43)$$

где  $I_t^a$  – автономные инвестиции в период  $t$ .

Если подставить (1.41), (1.42), в (1.43), то получим линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка относительно  $Y$ :

$$Y_t = (c + v)Y_{t-1} - vY_{t-2} + A_t, \quad (1.44)$$

где  $A_t$  – экзогенная величина автономного спроса (со стороны потребителей и производителей), из-за наличия которой уравнение (1.44) и является неоднородным (содержит слагаемое без  $Y$ ).

Как мы увидим далее, при заданных начальных условиях  $Y_0$ ,  $Y_1$  поведение решений уравнения (1.44) зависит главным образом от коэффициентов  $c$  и  $v$ . Величина дохода может (см. рис.1.3):

- а) совершать “взрывные” колебания с нарастающей амплитудой (например, при  $c = 0.5, v = 1.5, A_0 = 100, A_t = 110$  при  $t \geq 1, Y_0 = 200, Y_1 = 210$ );
- б) затухающие колебания около некоторого равновесного уровня (при  $c = 0.55, v = 0.8$ , остальные данные – как в а) );
- в) равномерные колебания ( $c = 0.5, v = 1$ );
- г) стабилизироваться после некоторого роста.

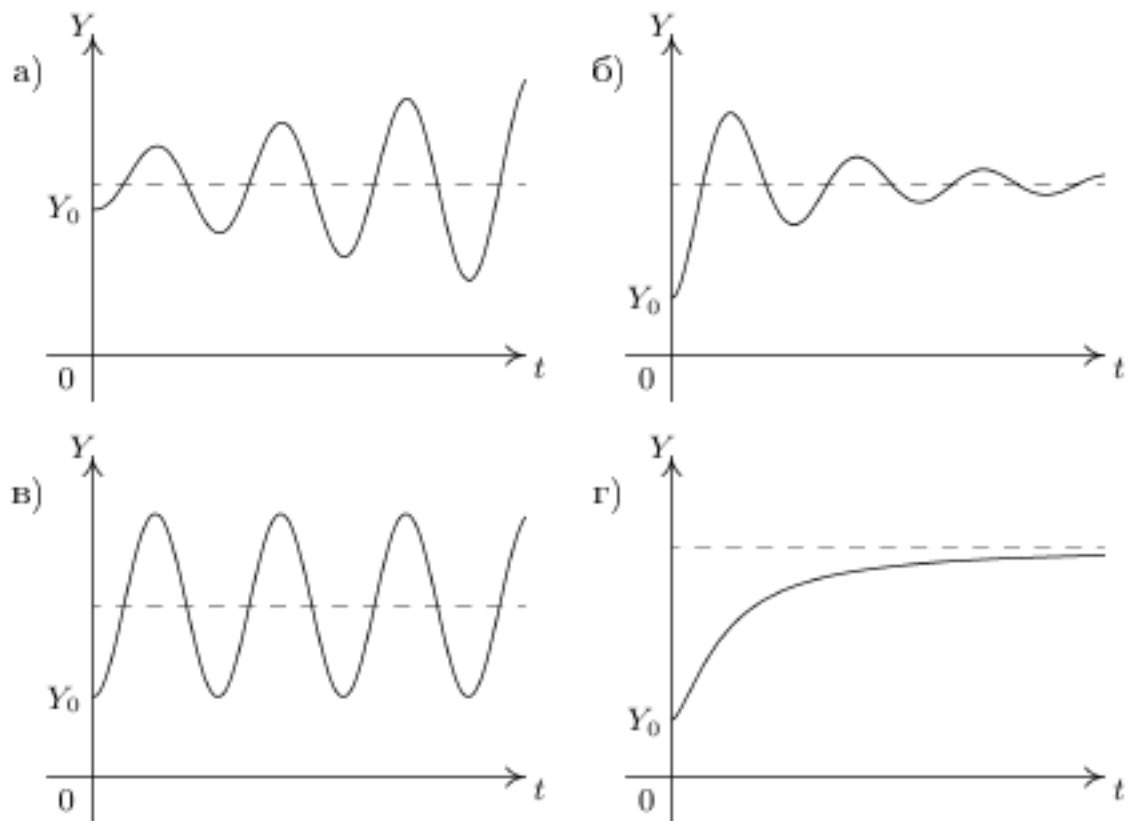


Рис.1.3. Возможные типы поведения “сглаженных” траекторий в модели Самуэльсона - Хикса .

**Пример 1.14.** *Модель экономического цикла Филлипса.* Непрерывным аналогом модели Самуэльсона - Хикса является модель экономического цикла А.Филлипса (1954), которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad C(t) &= cY(t) + C_0, \\ \text{б)} \quad \frac{dK(t)}{dt} &= \alpha[vY(t) - K(t)], \\ \text{в)} \quad \frac{dY(t)}{dt} &= \beta\left[C(t) + \frac{dK(t)}{dt} - Y(t)\right], \end{aligned} \tag{1.45}$$

где  $\alpha, \beta, v > 0$  - параметры. Заметим, что модель включает в себя систему из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка б), в) и конечное равенство а). Кроме того, смысл уравнений б), в) требует разъяснений, ибо  $K$  вообще не входит в модель (1.44).

Рассмотрим в (1.45) уравнение б). Во-первых, его правая часть задает функцию чистых инвестиций  $I$ , поскольку  $K' = I$  по определению последних. Во-вторых, простая, но довольно поверхностная интерпретация этого уравнения состоит в следующем: принимается, что существует оптимальная пропорция между запасом капитала и уровнем дохода:  $K/Y = v$ . Если эта пропорция соблюдается, то  $I = 0$  и  $K' = 0$ . При  $K/Y > v$  (избыток капитала)  $I < 0$ ,  $K' < 0$  и капитал убывает, а при  $K/Y < v$  (дефицит капитала)  $I > 0$ ,  $K' > 0$  – капитал возрастает. Таким образом, в этой трактовке уравнение (1.45 б)) носит характер адаптации капитала к оптимальному значению капиталоемкости, причем инвестиции задаются по принципу обратной связи (являются функцией переменных состояния экономической системы  $K$  и  $Y$ , а не времени).

Однако такая интерпретация не вскрывает связи с моделью Самуэльсона - Хикса и ее динамической основой – принципом акселерации (см.(1.42)). Чтобы эта связь стала прозрачнее, необходимо использовать иную трактовку данного уравнения (1.45 б)) (принадлежащую автору модели). В этой трактовке уравнение б) выступает именно как выражение принципа акселерации: инвестиции в капитал зависят с некоторым распределенным по времени запаздыванием от прироста дохода ( $Y'$ ). Это предположение (вполне аналогичное дискретному (1.42)) можно выразить в интегральной форме

$$K'(t) = \beta v \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} Y'(t - \tau) d\tau. \tag{1.46}$$

Здесь  $v > 0$ , а параметр  $\beta > 0$  подбирается так, чтобы выполнилось условие нормировки

$$\beta \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} d\tau = 1.$$

Убывающая экспонента в (1.46) предписывает “вес” приросту дохода  $Y'(t - \tau)$  в любой прошлый момент времени, причем этот вес падает с ростом  $\tau$ , ибо более отдаленная в прошлое информация о росте дохода менее значима для принятия решения об инвестициях в текущий момент  $t$ .

Интегральное равенство (1.46) нетрудно преобразовать в дифференциальное уравнение (1.45 б)). Действительно, подстановка  $s = t - \tau$  позволяет преобразовать (1.46) к виду

$$K'(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} Y'(s) ds = \beta v e^{-\beta t} \int_{-\infty}^t e^{\beta s} Y'(s) ds.$$

Дифференцирование этого равенства по  $t$  дает

$$\beta e^{\beta t} K'(t) + e^{\beta t} K''(t) = \beta v e^{\beta t} Y'(t)$$

и после сокращения на  $\exp(\beta t)$  получаем равенство

$$\beta K'(t) + K''(t) = \beta v Y'(t).$$

Здесь каждое слагаемое есть производная некоторой функции и потому оно легко интегрируется:

$$\beta K(t) + K'(t) = \beta v Y(t) + D,$$

где  $D$  – постоянная интегрирования. Если взять  $D = 0$ , то как раз получим уравнение (1.45 б)). Значит, оно действительно является особой формой акселератора <sup>1</sup>.

Остается пояснить уравнение (1.45 в)), которое оказывается уравнением адаптации дохода к дисбалансу реального рынка. Действительно, коль скоро  $K' = I$  есть чистые инвестиции (т.е. валовые – амортизация), то условие макроравновесия запишется следующим образом

$$\underbrace{Y + R}_{\text{валовой доход}} = \underbrace{C + K + R}_{\text{спрос}},$$

(предложение)

---

<sup>1</sup>Заметим, что попутно мы изложим весьма полезный прием учета временного запаздывания в непрерывных моделях: желательное равенство  $K = vY$  можно выдерживать лишь с некоторым запаздыванием по времени, которое описывает уравнение (1.45 в)).

где  $R$  – затраты на возмещение капитала. Отсюда ясно, что в (1.45 в)) выражение в скобках есть избыточный спрос. Поэтому доход возрастает или убывает в зависимости от знака избыточного спроса.

Для математического анализа модели (1.45) естественно исключить  $C$ , подставив (1.45 а)) и (1.45 б)) в последнее уравнение. В результате получим систему двух дифференциальных уравнений относительно  $K$  и  $Y$  (аргумент  $t$  опускаем):

$$\begin{aligned} K' &= \alpha(vY - K), \\ Y' &= \beta(\alpha v - s)Y - \alpha\beta K + \beta c_0, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где  $s = 1 - c$  – предельная склонность к сбережению.

Как уже было упомянуто выше, такую систему можно попытаться свести к одному уравнению 2-го порядка, путем исключения одной из переменных. Поскольку дискретная модель (1.45) записана относительно дохода, то для сравнения с ней будем исключать  $K$  (хотя это и не принципиально). Для этого:

выразим  $K$  из 2-го уравнения

$$K = \frac{1}{\alpha\beta}[\beta(\alpha v - s)Y - Y' + \beta c_0]; \quad (1.48)$$

продифференцируем это равенство по  $t$  (получим  $K' = \dots$ ) и приравняем это выражение к правой части первого уравнения в (1.47), в котором  $K$  заменено на (1.48).

В результате получим искомое уравнение 2-го порядка:

$$Y'' + (\alpha - \alpha\beta v + \beta s)Y' + \alpha\beta sY = \alpha\beta c_0.$$

Вводя компактные обозначения для постоянных коэффициентов

$$A = \alpha - \alpha\beta v + \beta s, B = \alpha\beta s, D = \alpha\beta c_0,$$

перепишем его в виде

$$Y'' + AY' + BY = D. \quad (1.49)$$

Как и в дискретной модели, мы получили линейное неоднородное уравнение. Зная любое его решение  $Y(t)$ , можно из (1.48) (1.45 а)) найти

соответствующие траектории  $K(t)$  и  $C(t)$ . Свойства траекторий непрерывной модели зависят от параметров и во многом схожи со свойствами траекторий в модели Самуэльсона-Хикса.

Описанные модели экономического цикла линейны и, благодаря этому, их решения могут быть найдены явно и затем проанализированы. Этот анализ и сравнение с эмпирическими данными вскрыли ряд недостатков данных моделей. Поэтому в дальнейшем экономистами были предложены более реалистичные модели цикла, в частности, нелинейные.

Прежде, чем переходить к ним, еще раз в несколько упрощенном виде представим модель Филлипса, отнеся в ней описание процесса адаптации и акселератора с запаздыванием.

Исходным пунктом может служить простейшая линейная модель роста Р. Харрода (1948), в которой:

- а) доход пропорционален капиталу, т.е.  $Y = AK$  (линейная производственная функция);
- б) сбережения ( $S$ ) пропорциональны доходу, т.е.  $S = sY$ ;
- в) инвестиции ( $I$ ) представлены “идеальным” акселератором без запаздывания  $I = vY'$  (сравните с (1.42));
- г) выполнено условие равновесия  $I = S$ , что дает уравнение

$$vY' = sY$$

или

$$Y' = \frac{s}{v}Y,$$

и, следовательно, все переменные в модели Харрода экспоненциально возрастают с одним темпом  $s/v$ .

А.Филлипс отказался от условия равновесия г), заменив его уравнением адаптации

$$Y' = a(I - S) = a(I - sY), \quad a > 0, \quad (1.50)$$

и учел, что соотношение акселератора может выполняться лишь приближенно в силу временного запаздывания, т.е. заменил в) на уравнение

$$I' = b(vY' - I), \quad b > 0. \quad (1.51)$$



Если оставить предположение а), то упрощенная система Филлипса (1.50), (1.51) заменяет (1.45). Описанным в примере 1.14 способом она сводится к уравнению 2-го порядка (проверьте и укажите отличие этого уравнения от (1.49)) .

**Пример 1.15.** *Модели Пу.* Объединяя идеи Дж. Хикса (о кусочно линейном моделировании акселератора) и Р. Гудвина (акселератор – гладкая нелинейная функция), Т.Пу предложил кубическую функцию инвестиций

$$I = v \left[ Y' - \frac{1}{3}(Y')^3 \right] \quad (1.52)$$

в непрерывной модели и аналогичную по смыслу

$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3 \quad (1.53)$$

в дискретной , причем в последней введено более распределенное запаздывание потребления в сравнении с (1.41) –

$$C_t = cY_{t-1} + (1 - c)Y_{t-2} . \quad (1.54)$$

Если использовать (1.52) при составлении непрерывной модели типа (1.50), (1.51) и исключить затем инвестиции, то получим нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка (параметры адаптации для простоты взяты по единице)

$$Y'' + sY = (v - 1 - s)Y' - \frac{v}{3}(Y')^3 . \quad (1.55)$$

Подстановка (1.53), (1.54) в условие равновесия  $Y_t = C_t + I_t$  приводит к нелинейному разностному уравнению 2-го порядка

$$Y_t - Y_{t-1} = (v - s)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3 .$$

Очевидной подстановкой

$$Z_{t-1} = Y_t - Y_{t-1} \quad (1.56)$$

оно сводится к нелинейному уравнению 1-го порядка

$$Z_t = (v - s)Z_{t-1} - v Z_{t-1}^3 . \quad (1.57)$$

В отличие от исходных, эти модели не допускают нахождения решения в явном виде и могут решаться (и исследоваться) численно на компьютере. Качественный анализ этих моделей выявил чрезвычайно интересное поведение траекторий этих моделей.

**Пример 1.16.** *Модель экономического цикла Кальдора.* Не совсем понятно, почему эта модель, предложенная Н. Кальдором на рубеже 40-х годов прошлого века, гораздо менее известна в экономической среде, чем модели Самуэльсона-Хикса и Филлипса. Между тем, эта модель и ее разнообразные модификации имеют богатое содержание и являются объектом многочисленных исследований в области экономической динамики.

В основе модели Кальдора лежит предположение, что инвестиции в односекторной экономике положительно зависят от национального дохода, но склонность к инвестициям падает, если доход отклоняется от своего “равновесного” значения. Кроме того, считается, что при данном уровне дохода инвестиции убывают с ростом капитала и существует уровень дохода  $\bar{Y}$ , ниже которого предельные инвестиции по доходу возрастают, а выше – убывают.

Эти гипотезы относительно функции инвестиций можно записать в виде следующих условий (см. рис.1.5):

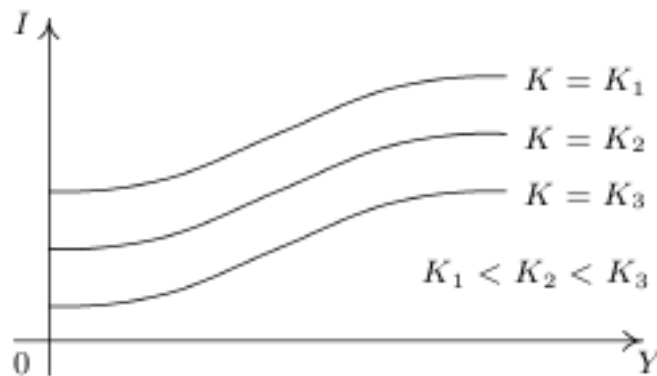


Рис.1.5. Функция инвестиций в модели Кальдора.

$$I = I(Y, K) ,$$

$$I'_Y > 0 , \quad I'_K < 0 ,$$

$$I''_{YY} \begin{cases} > 0 , & Y < \bar{Y} , \\ < 0 , & Y > \bar{Y} . \end{cases}$$

Далее, функция сбережений положительно зависит от дохода –

$$S = S(Y, K) ,$$

причем

$$S'_Y \in (0, 1), \quad S'_K > I'_K.$$

Прирост дохода пропорционален избыточному спросу, а динамика капитала описывается обычным уравнением с амортизацией. В непрерывном варианте эти два условия приводят к следующей системе

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y, K) - S(Y, K)] , \\ \frac{dK}{dt} &= I(K, Y) - bK , \end{aligned} \tag{1.58}$$

где  $\alpha > 0$  – коэффициент адаптации, а  $b$  – норма выбытия капитала.

В частном случае, когда  $b = 0$ ,  $S$  не зависит от капитала и линейна по доходу, а  $I'_K = const < 0$ , модель (1.58) преобразуется к дифференциальному уравнению 2-го порядка (проверьте).

Переход к дискретной версии модели очевиден.

**Пример 1.17.** *Расширенная модель Кейгана: влияние реального сектора и занятости.* Дополним модель из примера 1.4 учетом влияния на инфляцию выпуска продукции и занятости в условиях совершенного предвидения ( $\pi = p$ ).

Модель включает в себя:

- производственную функцию Кобба–Дугласа

$$Y = AN^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad A > 0,$$

где  $N$  – число занятых;

- условие равновесия на денежном рынке (при  $\pi = p$ )

$$\frac{M}{P} = \alpha_1 Y + e^{-\alpha_2 p'(t)}, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0 ,$$

где  $M = \bar{M} = const$  – номинальное предложение денег,  $P$  – фактический уровень цен,  $p = \ln P$ ,  $p'(t)$  – темп инфляции (равный  $P'(t)/P(t)$ ) ;

- функцию спроса на труд, которая определяется через предельный продукт труда и реальную ставку зарплаты  $W/P$

$$\frac{W}{P} = CN^{-\alpha}, \quad C > 0 ;$$

- уравнение динамики зарплаты, которое представляет собой один из вариантов описания кривой Филлипса

$$w' = \gamma(n - \bar{n}), \quad \gamma > 0,$$

где  $w = \ln W$ ,  $n = \ln N$ ,  $\bar{n} = \ln \bar{N}$  – логарифмы полной занятости.

Если переменные  $Y, M$  также заменить на логарифмы, т.е. ввести  $y = \ln Y$ ,  $m = \ln M$ , то соотношения модели “линеаризуются” и она принимает вид системы:

$$\begin{aligned} y &= a + (1 - \alpha)n, & \text{где } a = \ln A, \\ m - p &= \alpha_1 y - \alpha_2 p', \\ w - p &= c - \alpha n, & \text{где } c = \ln C, \\ w' &= \gamma(n - \bar{n}). \end{aligned} \tag{1.59}$$

В ней лишь два дифференциальных уравнения относительно  $p$  и  $w$  (это 2-ое и 4-ое), а два уравнения конечны. Поэтому переменные  $y, n$  можно исключить и преобразовать (1.59) к системе двух линейных дифференциальных уравнений, а затем – к уравнению 2-го порядка (проверьте).

Дискретный вариант модели предоставляем выписать читателю.

**Пример 1.18.** *Модель инфляционных ожиданий в переходной экономике.* Эта модель также является модификацией модели гиперинфляции Кейгана, но в ней инфляционные ожидания моделируются с учетом состояния реального рынка, что отражает влияние нерыночных сил в экономике переходного периода.

Функция спроса на деньги в этой модели берется как у Кейгана, т.е.

$$m_d - p = -\alpha\pi$$

(все переменные в модели являются логарифмами макропеременных; см. примеры 1.4, 1.17). Денежное предложение определим равенством

$$m_s = m - \pi,$$

где  $m = \ln M$  – логарифм некоторого равновесного предложения денег. Согласно этой зависимости центральный банк проводит контрциклическую монетарную политику: увеличение инфляционных ожиданий ( $\pi$ ) заставляет сокращать предложение денег, а уменьшение – увеличивать.

Источником изменения ожиданий является рассогласованность денежного спроса и предложения, т.е. для  $\pi$  используется уравнение адаптации

$$\pi' = \beta(m_s - m_d),$$

где  $\beta > 0$  – скорость реакции. Подставляя в правую часть  $m_s$  и  $m_d$  из предыдущих равенств, получим уравнение

$$\pi' = \beta[m - p - (1 - \alpha)\pi]. \quad (1.60)$$

С другой стороны, производители формируют свои ожидания, учитывая фактический темп инфляции  $p'(t)$  и состояние рынка, которое описывается нелинейной функцией  $y = g(p)$ , где  $y$  – индекс состояния реального рынка (определяется по агрегированным показателям спроса и предложения на реальном рынке). Инфляционные ожидания производителей равны фактической инфляции, скорректированной на состояние рынка, что описывается равенством

$$\pi = p' + \gamma g(p), \quad (1.61)$$

где параметр  $\gamma > 0$  отражает степень “неконкурентности” рынка в переходной экономике. Согласно (1.61) ожидания больше фактической инфляции, если  $g(p) > 0$  и меньше ее при  $g(p) < 0$ .

Выражая из (1.61)  $p'$ , получаем дифференциальное уравнение

$$p' = \pi - \gamma g(p),$$

которое рассматривается совместно с (1.60). Путем исключения одной из переменных (скажем  $\pi$ ) эта система уравнений преобразуется к нелинейному уравнению второго порядка

$$p'' + \left[ \frac{a\beta}{\gamma} + g'(p) \right] p' + a\beta g(p) - \gamma bp = \gamma bt, \quad (1.62)$$

где  $a = 1 - \alpha$ , а  $t$  можно рассматривать как экзогенную переменную.

При кубической функции состояния рынка

$$g(p) = \frac{1}{3}p^3 - p$$

уравнение (1.62) становится так называемым уравнением Ван дер Поля и описывает *релаксационные колебания*.

## **Основные понятия**

Динамические модели

Дифференциальные уравнения

Порядок дифференциального уравнения

Решение дифференциального уравнения

Разностные уравнения

Порядок разностного уравнения

Решение разностного уравнения

Шаг дискретизации времени

Начальные условия (для дифференциальных  
и разностных уравнений)

## Глава 2

# Разностные уравнения первого порядка

### 2.1. Общие понятия и элементы качественно-го анализа

*Разностным уравнением 1-го порядка* называется рекуррентное соотношение вида

$$y_{t+1} = f(t, y_t), \quad (2.1)$$

где переменная  $t$  пробегает все значения из множества неотрицательных целых чисел

$$\mathbf{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots$$

и интерпретируется как номер периода времени,  $y_t = y(t)$  – неизвестная функция, определенная на  $\mathbf{Z}_+$ , т.е. числовая последовательность,  $f(t, y)$  – заданная числовая функция двух аргументов, первый из которых целочисленный ( $t \in \mathbf{Z}_+$ ), а второй может принимать любые значения из множества действительных чисел  $R$ , или из некоторого его подмножества  $S$ . В приложениях  $S$  – это некоторый числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Таким образом, разностное уравнение 1-го порядка связывает между собой каждый последующий член искомой последовательности с предыдущим. Если задать начальную точку

$$y_0 \in \mathbf{S},$$

то соотношение (2.1) позволяет (в принципе) вычислить все последующие члены последовательности методом итераций (повторных подстановок):

$$y_1 = f(0, y_0), \quad y_2 = f(1, y_1) \quad \text{и т.д.}$$

Получающиеся точки  $y_1, y_2, \dots$  должны попадать в  $\mathbf{S}$ , если функция  $f$  определена не при всех значениях  $y$ , ибо иначе вычисления невозможно продолжить. Следовательно, *функция  $f$  должна быть определена на*

множестве

$$D = \{ (t, y) \mid t \in \mathbf{Z}_+, y \in S \} \quad (2.2)$$

и принимать значения в  $S$ . Символически это свойство записывают следующим образом:

$$f : D \rightarrow S, \quad (2.3)$$

и говорят „  $f$  есть отображение из  $D$  в  $S$  (отображает  $D$  в  $S$ ).“

Динамическая система (2.1) полностью определяется отображением  $f$  со свойствами (2.2), (2.3). Множество  $S$  называют *фазовым множеством* (или фазовым пространством) уравнения (2.1), а переменную  $y$  – *фазовой переменной*. Ее значение в каждый период времени  $t$  –  $y_t$  характеризует состояние моделируемой системы, или, иначе говоря, состояние процесса.

Если функция  $f(t, y)$  линейна по  $y$ , т.е. имеет вид

$$f(t, y) = a(t)y + b(t),$$

то и соответствующее разностное уравнение

$$y_{t+1} = a(t)y_t + b(t)$$

называют линейным. В этом случае  $f$  определена при всех  $y$  и в качестве  $S$  можно взять фазовую прямую  $\mathbf{R}$ .

**Определение 2.1.** Бесконечная последовательность  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_t, \dots$ , удовлетворяющая уравнению (2.1), называется *решением с начальным условием  $y_0$* , или *траекторией*, начинающейся в точке  $y_0$ . Она обозначается через  $\{y_t\}$  или, более полно,  $\{y(t, y_0)\}$ .

Из этого определения и предшествующих пояснений получаем следующий вывод:

2.1. Пусть функция  $f(t, y)$  определена на множестве  $D$  и принимает значения в  $S$  (см. (2.2)). Тогда для любой начальной точки  $y_0 \in S$  существует единственная траектория  $y(t, y_0)$ , целиком проходящая по  $S$ , т.е. удовлетворяющая условию  $y_t \in S \quad \forall t \in \mathbf{Z}_+$ .

Таким образом, решение разностного уравнения существует и единственно при очень слабых предположениях на функцию  $f$ : никаких условий непрерывности и гладкости не требуется; все, что нужно, – это согласование области определения и области значений (см. (2.2), (2.3)). Как



мы увидим далее, в случае дифференциальных уравнений дело обстоит не так просто.

Нас будут интересовать следующие два основных вопроса.

Первый: как *решить уравнение* (2.1) с начальным условием  $y_0$ , т.е. как найти общий член искомой последовательности в виде явной функции  $t$ ?

Для ответа на него непосредственное использование рекуррентных вычислений по формуле (2.1) малоприспособно – оно приводит к цели лишь в случае очень простых уравнений. Существуют специальные методы нахождения решений некоторых типов разностных уравнений 1-го порядка, в основном линейных.

Поскольку эти методы имеют весьма ограниченную сферу применения, то возникает второй вопрос: как по заданному уравнению (т.е. по функции  $f$ ) получить *качественное представление* о поведении траекторий при различных начальных значениях  $y_0$ ? В частности, особый интерес для экономистов представляет *устойчивость решений* – их сходимость к конечному пределу при  $t > +\infty$ .

*Замечания.* 1) Иногда используется понятие *общего решения* уравнения (2.1). Под ним понимается такая функция  $y = y(t, C)$ , зависящая от  $t \in \mathbf{Z}_+$  и произвольной постоянной  $C$ , что, во-первых, она удовлетворяет уравнению (2.1) при любом  $C$  и, во-вторых, любое решение уравнения (2.1) можно получить из нее подходящим выбором произвольной постоянной. Например, линейное уравнение  $y_{t+1} = ay_t$  с произвольной начальной точкой  $y_0$  имеет решение  $y_t = y_0 a^t$  (обоснуйте этот факт). Все эти решения очевидным образом получаются из функции  $y(t, C) = Ca^t$ , которая и является в данном случае общим решением. Если решение уравнения (2.1) удалось получить для произвольной начальной точки (как функцию  $t$  и  $y_0$ ), то это и будет общим решением. Именно так обстоит дело в приведенном простом примере.

2) Решение уравнения (2.1) с заданной начальной точкой  $y_0$  называют *решением начальной задачи*, или решением задачи Коши для данного уравнения. Отметим, что иногда рассматривают начальное условие вида  $y(t_0) = y_0$ , которое задают в период  $t_0 > 0$ . Мы полагаем  $t_0 = 0$  из соображений удобства, что не ведет к потере общности. (Обоснуйте, почему?)

## Автономные уравнения и точки равновесия

Разностное уравнение называют *автономным* (или стационарным), если оно явно не зависит от времени  $t$ . В автономном случае уравнение (2.1) принимает вид

$$y_{t+1} = f(y_t), \quad (2.4)$$

где функция  $f(y)$  отображает фазовое множество  $\mathbf{S}$  в себя (т.е.  $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ ).

Автономными уравнениями моделируются процессы, протекающие в условиях постоянства внешней среды и отсутствия экзогенных воздействий. Например, все макромоделли, предполагающие постоянство технологии, описываются автономными уравнениями; учет технического процесса приводит к неавтономным уравнениям.

Для автономных уравнений важное значение имеют точки равновесия и их свойства устойчивости или неустойчивости.

Число  $y^*$  называется *точкой равновесия* автономного уравнения (2.4), если  $f(y^*) = y^*$ . Постоянная траектория  $y_t = y^*$  является в этом случае одним из решений уравнения (2.4). Действительно, если мы стартуем из начальной точки  $y_0 = y^*$ , то последовательные вычисления показывают, что никакого движения не происходит:  $y_1 = f(y^*) = y^*$ ,  $y_2 = f(y_1) = f(y^*) = y^*$  и т.д. Поэтому точки равновесия называют также *стационарными* или *неподвижными точками* уравнения (2.4). Согласно определению, эти точки находятся путем решения уравнения

$$f(y) = y.$$

Так как под действием отображения  $f$  они не меняются, то их называют *неподвижными точками отображения  $f$* .

Следующее утверждение показывает, что траектории разностного уравнения могут сходиться при  $t \rightarrow +\infty$  только к неподвижным точкам.

2.2. Пусть  $y_t$  – некоторая траектория уравнения (2.4), сходящаяся при  $t \rightarrow \infty$  к числу  $a$ . Если функция  $f(y)$  непрерывна в точке  $a$ , то  $a$  – точка равновесия уравнения (2.4) (т. е. неподвижная точка отображения  $f$ .)

Действительно, непрерывность функции  $f(y)$  в точке  $a$  означает, что

$$\exists \lim_{\substack{y \rightarrow a \\ y \in \mathbf{S}}} f(y) = f(a). \quad (2.5)$$

Согласно предположению,  $y_t \in \mathbf{S} \forall t$ ,  $y_t \rightarrow a$  при  $t \rightarrow \infty$  и удовлетворяет равенству (2.4). В силу (2.5), в этом равенстве левая и правая части имеют пределом число  $a$ , так что предельный переход при  $t \rightarrow \infty$  дает равенство  $a = f(a)$ . Оно означает, что  $a$  – точка равновесия.

Из утверждения 2.2 следует, что, если отображение  $f$  непрерывно и не имеет неподвижных точек, то все траектории уравнения (2.4) расходятся (не имеют конечного предела при  $t \rightarrow \infty$ ).

**Пример 2.1.** Рассмотрим разностное уравнение

$$y_{t+1} = \sqrt{y_t}, \quad \text{т.е.} \quad y_{t+1} = y_t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Здесь функция  $f(y) = \sqrt{y}$  определена и непрерывна на фазовом множестве  $\mathbf{S} = \mathbf{R}_+$  и там же принимает свои значения. Уравнение для нахождения неподвижных точек  $\sqrt{y} = y$  имеет два корня:  $\bar{y} = 0$  и  $y^* = 1$ . Это и есть точки равновесия данного уравнения. Если взять начальную точку  $y_0 > 0$ ,  $y_0 \neq y^* = 1$ , то методом итераций найдем

$$y_1 = y_0^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = y_1^{\frac{1}{2}} = y_0^{\frac{1}{4}}, \quad \dots$$

и, улавливая закономерность, получаем решение – общий член последовательности –

$$y_t = y_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^t}, \quad t \in \mathbf{Z}_+.$$

При  $t \rightarrow \infty$  показатель степени стремится к нулю и, следовательно,  $y_t \rightarrow 1 = y^*$ . Все траектории, стартующие из состояния  $y_0 > 0$ , сходятся к неподвижной точке  $y^*$ . В этом случае говорят, что она устойчива, в то время как  $\bar{y} = 0$  – неустойчивая точка равновесия.

### Фазовая диаграмма

Динамику автономного уравнения  $y_{t+1} = f(y_t)$ , или действие соответствующего отображения  $f$ , наглядно иллюстрирует *фазовая диаграмма* (иногда ее называют диаграммой Ламерея или паутиной диаграммой). Она строится так (рис.2.1): в прямоугольной системе координат изображают график функции  $f(y)$ ; проводят биссектрису первого и третьего координатных углов; отрезками изображают переход от  $y_t$  к  $y_{t+1}$  и указывают переход от значения функции к новому значению члена последовательности (через биссектрису). Таким образом, мы начинаем в точке  $(y_0, y_1) = (y_0, f(y_0))$ , перемещаемся в точку  $(y_1, y_1)$ , затем в  $(y_1, y_2) =$

$= (y_1, f(y_1))$  и т.д.; вообще, на шаге  $t$  переходим из точки  $(y_{t-1}, y_t) = (y_{t-1}, f(y_{t-1}))$  в  $(y_t, y_{t+1}) = (y_t, f(y_t))$ .

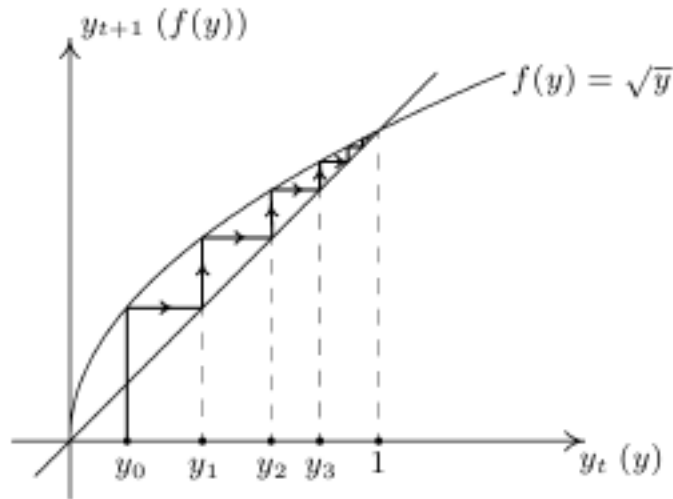


Рис.2.1. Фазовая диаграмма уравнения (2.6)

Фазовая диаграмма уравнения (2.6) на рис. 2.1 дает графическое представление о сходимости траекторий к неподвижной точке  $y^* = 1$ . В других случаях она может указывать на расхожимость траекторий, т. е. на неустойчивость неподвижных точек.

**Пример 2.2** представляет собой обобщение предыдущего: мы рассмотрим нелинейное уравнение

$$y_{t+1} = y_t^\alpha, \quad (2.7)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр.

При  $\alpha = 1$  уравнение (2.7) принимает вид  $y_{t+1} = y_t$ , откуда следует, что все его решения постоянны:  $y_t = c \quad \forall t$ , где  $c$  – любая константа (равная  $y_0$ ). Следовательно, имеется бесчисленное множество неподвижных точек, но ни одна из них не притягивает к себе другие траектории: сходимости  $y_t \rightarrow c$  при  $t \rightarrow \infty$  нет, если  $y_t \neq c$ .

Пусть  $\alpha \neq 1$ . Возьмем в качестве  $\mathbf{S}$  множество  $\mathbf{R}_+$ . Тогда функция  $f = y^\alpha$  отображает  $\mathbf{R}_+$  в  $\mathbf{R}_+$  и имеет там две неподвижные точки  $\bar{y} = 0$  и  $y^* = 1$  (корни уравнения  $y^\alpha = y$ ). Для нахождения решения, стартующего из точки  $y_0 > 0$ , последовательно получаем:

$$y_1 = y_0^\alpha, \quad y_2 = y_1^\alpha = y_0^{(\alpha^2)}, \quad \dots,$$

откуда заключаем, что

$$y_t = y_0^{\alpha^t}, \quad t \in \mathbf{Z}_+ \quad (2.8)$$

– искомая траектория.

Зная явную формулу для решений, можно аналитически исследовать их поведение при  $t \rightarrow \infty$ . Для этого прологарифмируем равенство в (2.8):

$$\ln y_t = \alpha^t \ln y_0.$$

Ясно, что сходимость (или расходимость) последовательности (2.8) при  $t \rightarrow \infty$  равносильна сходимости (расходимости) геометрической последовательности  $\alpha^t$ . (Объясните этот факт.) Ответ, очевидно, зависит от параметра  $\alpha$ , а также начальной точки:

- если  $\alpha < 1$ , то  $\alpha^t \rightarrow 0$  и, следовательно,  $y_t \rightarrow 1 = y^*$  при любом  $y_0 > 0$ ; точка равновесия  $y^*$  устойчива – притягивает к себе все такие траектории, а  $\bar{y}$  – неустойчивая точка равновесия;
- если  $\alpha > 1$  и  $y_0 < 1$ , то  $\ln y_t \rightarrow -\infty$  и, значит,  $y_t \rightarrow 0 = \bar{y}$ ;  $\bar{y}$  – устойчивая точка равновесия, притягивающая к себе все траектории, начинающиеся в  $\mathbf{R}_+$  вблизи нее;
- если  $\alpha > 1$  и  $y_0 > 1$ , то  $\ln y_t \rightarrow +\infty$  и, значит,  $y_t \rightarrow +\infty$ , т.е. эти траектории расходятся.

На рис. 2.2 изображена фазовая диаграмма для двух последних вариантов.

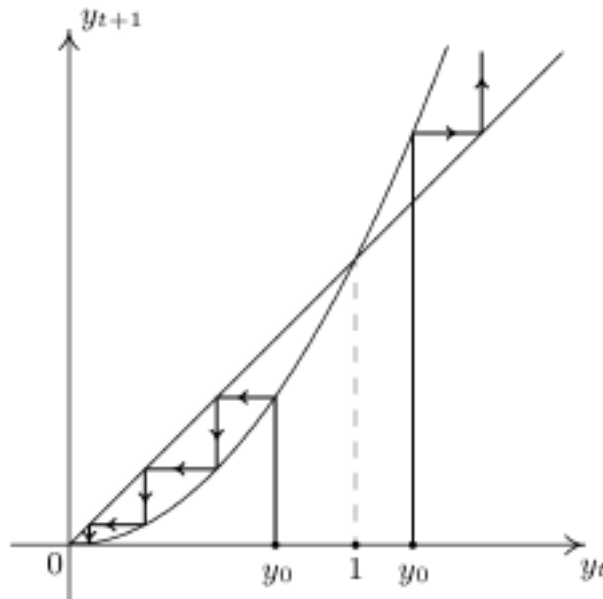


Рис.2.2. Фазовая диаграмма уравнения (2.7) при  $\alpha > 1$

## Устойчивость точек равновесия

Уточним понятия, которые на неформальном уровне уже использовались в примерах.

**Определение 2.2.** Пусть  $y^*$  – точка равновесия автономного уравнения  $y_{t+1} = f(y_t)$ , определенного на множестве  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$ . Тогда:

(1)  $y^*$  называют *устойчивой*, если все траектории, начинающиеся достаточно близко к  $y^*$ , остаются в произвольно малой ее окрестности; Формально:  $y^*$  устойчива, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую окрестность  $O$  точки  $y^*$ , что неравенство

$$|y_t - y^*| < \varepsilon \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

выполняется для всех траекторий  $y_t$  с начальной точкой  $y_0 \in O \cap \mathbf{S}$ .

(2)  $y^*$  называют *асимптотически устойчивой*, если она устойчива, и выполняется предельное условие

$$y_t \rightarrow y^* \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

для всех траекторий, начинающихся в  $\mathbf{S}$  достаточно близко к  $y^*$ .

Содержательный смысл этих понятий таков.

Устойчивая неподвижная точка *удерживает* вблизи себя траектории всех точек из некоторой своей окрестности (возможно, очень малой). Асимптотически устойчивая неподвижная точка не только является *удерживающей*, но она еще *притягивает* к себе траектории всех точек из некоторой своей окрестности. Наконец, неустойчивая неподвижная точка является *отталкивающей* в том смысле, что траектории всех близких к ней точек удаляются от нее.

Асимптотически устойчивые точки равновесия иногда называют *локально* устойчивыми, так как они должны притягивать к себе лишь траектории близких к ним точек. Если же  $y^*$  притягивает к себе все траектории, то ее называют *глобально* устойчивой. Однако это свойство встречается довольно редко, так что за пределами данного параграфа наречия “локально”, “глобально” будем часто опускать.

С каждой точкой равновесия  $y^*$  можно связать множество  $\mathbf{S}(y^*) \subset \mathbf{S}$ , стартуя с которого, траектории сходятся к  $y^*$ . Его называют *множеством притяжения* точки  $y^*$ . Если  $\mathbf{S}(y^*) = \{y^*\}$ , то  $y^*$  не является

асимптотически устойчивой неподвижной точкой, а если  $\mathbf{S}(y^*) = \mathbf{S}$ , то  $y^*$  глобально устойчива.

Для иллюстрации вновь вернемся к уравнению из примера 2.2. Для него имеются следующие варианты:

- если  $0 < \alpha < 1$ , то  $S(1) = \{y_0 \in \mathbf{R}_+ | y_0 > 0\}$ ,  $\mathbf{S}(0) = \{0\}$  и  $y^* = 1$  лишь локально устойчива – наличие второй неподвижной точки  $\bar{y} = 0$  сразу нарушает глобальную устойчивость;
- если  $\alpha > 1$ , то  $\mathbf{S}(0) = [0, 1)$ ,  $\mathbf{S}(1) = \{1\}$  и вновь  $\bar{y} = 0$  лишь локально асимптотически устойчива.

Хотя в (2.9)  $\varepsilon > 0$  произвольно мало, устойчивая точка равновесия может не удовлетворять предельному условию (2.10) и может оказаться не асимптотически устойчивой.

Именно так обстоит дело со *всеми* точками равновесия в примере 2.2 при  $\alpha = 1$ . (Проверьте.) Вот пример другого рода.

**Пример 2.3.** Разностное линейное уравнение  $y_{t+1} = -y_t$  имеет одну точку равновесия  $y^* = 0$  (здесь  $\mathbf{S} = \mathbf{R}$ ) и решения вида  $y_t = (-1)^t y_0$ . Они колеблются около  $y^*$  с постоянной амплитудой  $|y_0|$ , поочередно принимая значения  $y_0$  и  $(-y_0)$ . При выборе  $|y_0| < \varepsilon$  соответствующие траектории не покидают  $\varepsilon$ -окрестности  $y^*$ , но не сходятся к  $y^*$ . Значит,  $y^*$  локально устойчива, но не асимптотически.

Легко проверить, что в уравнении  $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t$  неподвижная точка  $y^* = 0$  оказывается уже локально асимптотически устойчивой, а в уравнении  $y_{t+1} = -2y_t$  она теряет даже свойство локальной устойчивости. В том и другом случаях колебательный характер траекторий сохраняется, но в первом амплитуда колебаний затухает, а во втором нарастает. Заметим, что эти уравнения получаются “изменением масштаба” – они являются частными случаями уравнения  $y_{t+1} = -ay_t$  с параметром  $a > 0$ . Значениям  $a = 1$ ,  $0 < a < 1$  и  $a > 1$  соответствует разительно отличающееся качественное поведение траекторий. Подобная резкая смена поведения траекторий динамических систем при изменении их параметров носит название *бифуркации*.

Понятие устойчивости было введено в конце XIX века русским ученым А.М.Ляпуновым применительно к более традиционным для математики дифференциальным уравнениям. Надо иметь в виду, что в настоящее

время существует несколько понятий устойчивости – мы рассматриваем лишь самые простые из них. Поэтому при изучении различных литературных источников необходимо обращать внимание на смысл используемых в них типов устойчивости. Особенно это относится к экономической литературе, где термин "устойчивость" применяется в самом разнообразном смысле, порой без всяких пояснений.

### Основные понятия

Решение разностного уравнения 1-го порядка

(а) с начальным условием

(б) общее

Траектория

Автономное (стационарное) уравнение

Точка равновесия, неподвижная точка уравнения

Неподвижная точка отображения

(а) удерживающая

(б) притягивающая

(в) отталкивающая

Устойчивость точки равновесия (неподвижной точки)

Фазовая диаграмма

### Вопросы

1. Для чего вводится фазовое множество?
2. Что означают записи:  $f : S \rightarrow S$ ;  $f : D \rightarrow S$ ?
3. В чем состоит условие согласования области определения и области значений отображения, задающего разностное уравнение первого порядка?



4. Для каких отображений  $f$  фазовое множество совпадает с числовой прямой  $\mathbf{R}$ ?
5. Совпадают ли неподвижные точки разностного уравнения и соответствующего ему отображения?
6. Пусть  $y^*$  – точка равновесия уравнения  $y_{t+1} = f(y_t)$ . Может ли траектория  $\{y_t\}$ , стартующая с  $y_0 \neq y^*$ , придти в  $y^*$ ?
7. Почему в разностном уравнении с несколькими точками равновесия не может быть глобально асимптотически устойчивой точки?
8. Могут ли пересекаться множества притяжения различных неподвижных точек?
9. Почему в определении устойчивости естественно использовать наречие "асимптотически"?
10. Пусть траектория  $\{y(t, y_0)\}$  уравнения  $y_{t+1} = f(y_t)$  сходится к точке  $a$  при  $t \rightarrow \infty$ . Что можно сказать о точке  $a$ , если: а) функция  $f$  непрерывна; б)  $f$  разрывна?

## Задачи

**2.1.** Используя метод итераций, найти решения следующих линейных уравнений с указанной начальной точкой:

а)  $y_{t+1} = y_t + 1, y_0 = 10;$

б)  $y_{t+1} = \alpha y_t, y|_{t=0} = y_0;$

в)  $y_{t+1} = \alpha y_t - \beta, y_t = y_0$  при  $t = 0$ .

**2.2.** Используя фазовую диаграмму, исследовать на устойчивость неподвижные точки уравнений из задачи 2.1.

**2.3.** Найти фазовые множества, точки равновесия и исследовать их на устойчивость с помощью фазовой диаграммы:

а)  $y_{t+1} = \frac{3}{16} + y_t^2;$

б)  $y_{t+1} = 2 - 3y_t^2;$

в)  $y_{t+1} = 4 + \frac{9}{4y_t}$  ;

г)  $y_{t+1} = 1 + \frac{3}{4y_t}$  .

**2.4.** а) Изобразить в координатной плоскости  $(t, y)$  траектории уравнений из примера 2.3 и построить фазовые диаграммы;

б) Найти решения уравнения  $y_{t+1} = ay_t$  и исследовать устойчивость точки равновесия в зависимости от параметра  $a$ .

**2.5.** При анализе уравнения  $y_{t+1} = (y_t)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  в примере 2.2 в качестве фазового множества была выбрана полуось  $\mathbf{R}_+$ . Однако для некоторых  $\alpha$  его можно взять более широким.

а) Указать, для каких  $\alpha$  можно положить  $\mathbf{S} = \mathbf{R}$  ;

б) Рассмотреть два уравнения с дробным и целым значением  $\alpha$  из ответа на вопрос а). Найти их решения, исследовать на устойчивость точки равновесия (на фазовой прямой  $\mathbf{R}$ ) и построить фазовые диаграммы.

**2.6.** Рассмотрим основное уравнение неоклассической модели экономического роста из примера 1.9:

$$k_{t+1} = v[f(k_t) + (1 - b)k_t - c_t].$$

Исследовать его на устойчивость при степенной производственной функции  $f(k) = \sqrt{k}$  и среднедушевом потреблении  $c_t = cf(k_t)$ , где  $c \in (0, 1)$  – норма потребления.

## 2.2. Линейные уравнения

Общее *линейное, неавтономное*, разностное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$y_{t+1} = a(t)y_t + b(t), \quad t \in \mathbf{Z}_+, \quad (2.11)$$

где “коэффициенты“  $a(t), b(t)$  – заданные функции целочисленного аргумента  $t \in \mathbf{Z}_+$ . При  $b(t) \equiv 0$  его называют *однородным*, а в противном случае – *неоднородным*.

Мы начнем с более простого автономного линейного уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + b, \quad t \in \mathbf{Z}_+, \quad (2.12)$$

где  $a, b$  – константы. Оно задается всюду определенной линейной функцией  $f(y) = ay + b$ , поэтому фазовое множество совпадает с  $\mathbf{R}$ .

**(1) Однородное уравнение**  $y_{t+1} = ay_t$  задает геометрическую прогрессию со знаменателем  $a$ . Поэтому его решение, начинающееся в точке  $y_0$ , описывается показательной функцией:  $y_t = y_0 a^t$ .

Напомним, что непрерывный аналог данного уравнения – дифференциальное уравнение  $y' = ay$  имеет экспоненциальное решение  $y(t) = y_0 e^{at}$ . В решениях разностных уравнений вместо экспонент будут появляться показательные функции.

Данному уравнению соответствует отображение  $f = ay$  с одной неподвижной точкой  $y^* = 0$  (корнем уравнения  $ay = y$ ). При  $|a| < 1$  это отображение описывает *сжатие*, а при  $|a| > 1$  – *растяжение* (каждой точки  $y$  в  $a$  раз). Соответственно, при  $|a| < 1$  неподвижная точка  $y^* = 0$  глобально устойчива:  $y_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех  $y_0$ ; при  $|a| > 1$  она неустойчива – траектории неограниченно удаляются от нее. Что же касается случаев  $a = 1$  (все траектории постоянны) и  $a = -1$  (решения  $y_t = (-1)^t y_0$  колеблются около  $y^*$  с постоянной амплитудой), то в них  $y^*$  устойчива, но не асимптотически.

Заметим, что общее решение рассматриваемого однородного уравнения имеет вид  $y(t, C) = Ca^t$ ; оно лишь обозначением отличается от указанного выше решения.

**(2) Неоднородное уравнение** (2.12) при  $a \neq 1$  имеет одну точку равновесия

$$y^* = \frac{b}{1-a}$$

и может быть сведено к однородному подстановкой

$$x_t = y_t - y^* \quad (\text{тогда } y_t = x_t + y^*). \quad (2.13)$$

Для новой неизвестной функции  $x_t$  получается однородное уравнение  $x_{t+1} = ax_t$  с начальной точкой  $x_0 = y_0 - y^*$ . Действительно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_{t+1} - y^* = ay_t + b - y^* = \\ &+ ax_t + \underline{ay^* + b - y^*} = ax_t, \end{aligned}$$

так как подчеркнутые члены сокращаются. Это однородное уравнение имеет решение

$$x_t = x_0 a^t = (y_0 - y^*) a^t,$$

и обратной подстановкой получаем решение исходного уравнения:

$$y_t = x_t + y^* = (y_0 - y^*)a^t + y^* \quad (a \neq 1). \quad (2.14)$$

В исключенном случае  $a = 1$  уравнение принимает вид  $y_{t+1} = y_t + b$  (с отображением сдвига  $f = y + b$ ). Ясно, что оно задает арифметическую прогрессию с разностью  $b$  и, следовательно, имеет решение

$$y_t = y_0 + tb \quad (a = 1). \quad (2.15)$$

В этом случае точек равновесия нет и решения становятся неограниченными при  $t \rightarrow \infty$ .

Формула (2.14) позволяет легко проанализировать свойства устойчивости в содержательном случае  $a \neq 1$ :

- при  $|a| < 1$   $y_t \rightarrow y^* \quad \forall y_0$  и  $y^*$  глобально устойчива;
- при  $|a| > 1$   $|a^t| \rightarrow \infty$  и траектории неограниченно удаляются от неустойчивой точки  $y^*$ ;
- при  $a = -1$  траектории совершают циклические колебания около точки равновесия, которая устойчива (но не асимптотически).

Качественное представление о поведении траекторий уравнения (2.12) дают рис.2.3 и рис.2.4. Обратите внимание на монотонную сходимость, или расходимость решений при  $a > 1$  и колебательную при  $a < 0$ .

**Замечание.** Линейному уравнению (2.12) соответствует отображение  $f = ay + b$ . Оно представляет собой сумму отображений растяжения  $(ay)$  с коэффициентом  $|a|$  и отображения сдвига на  $b$  единиц. Как мы видим, неподвижная точка оказывается притягивающей (глобально устойчивой), если только коэффициент растяжения  $< 1$ , т.е. в действительности имеет место сжатие.

Заслуживает внимание и метод получения решения неоднородного уравнения, а также его структура. В этом методе на первом шаге находится некоторое *частное решение неоднородного уравнения* (в качестве него при  $a \neq 1$  выступает стационарное решение  $y^*$ ), на втором – *решение соответствующего однородного уравнения с подходящим начальным условием* (в данном случае  $y_0 - y^*$ ) и, наконец, эти решения суммируются и дают решение неоднородного уравнения с заданным начальным условием (см.(2.14)). Можно проверить, что и в случае  $a = 1$

решение (2.15) можно получить по этой схеме (проверьте). Описанным методом можно получать решения всех линейных неоднородных разностных и дифференциальных уравнений.

Отметим, что если ввести функцию

$$y(t, C) = Ca^t + y^*,$$

где  $t \in \mathbf{Z}_+$ , а  $C$  – произвольная постоянная, то она будет общим решением уравнения (2.12) при  $a \neq 1$ . (Проверьте.) Мы видим, что и *общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного*.

В действительности формулы (2.14), (2.15) тоже задают общее решение уравнения (2.12), так как начальная точка  $y_0$  в них произвольна.

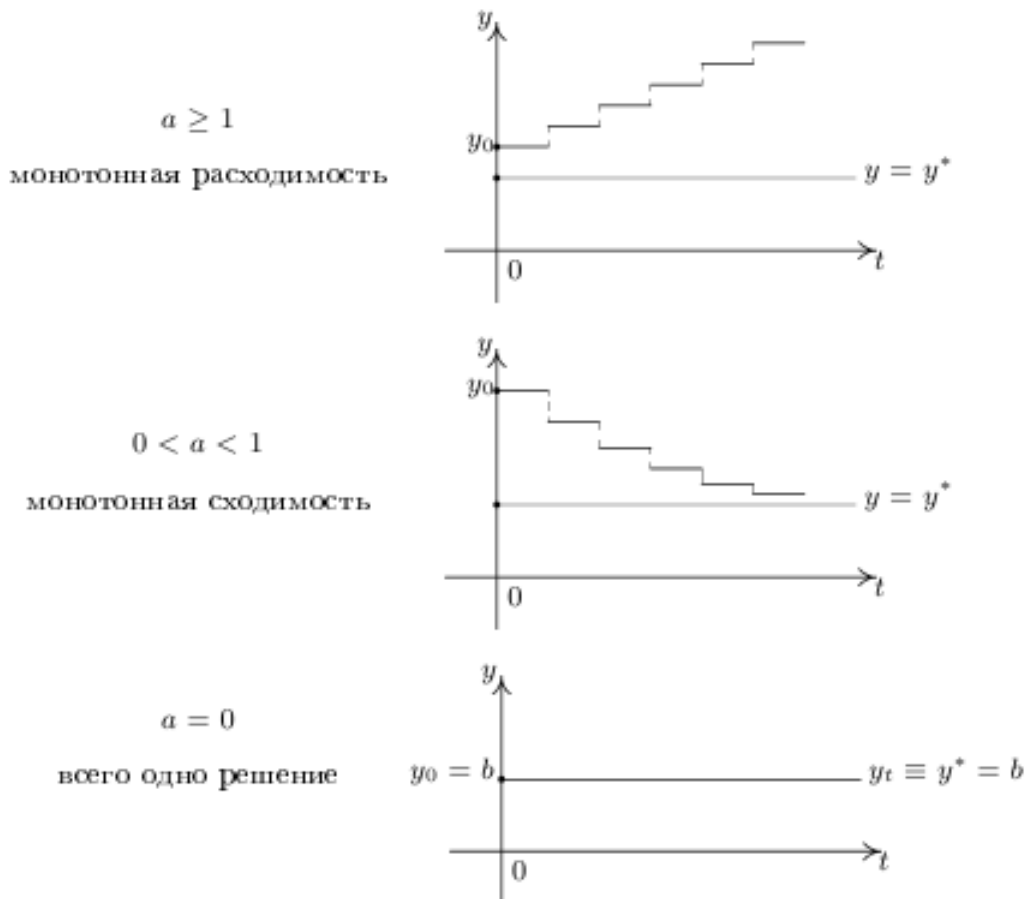


Рис.2.3. Поведение траекторий уравнения (2.12) при неотрицательных значениях  $a$

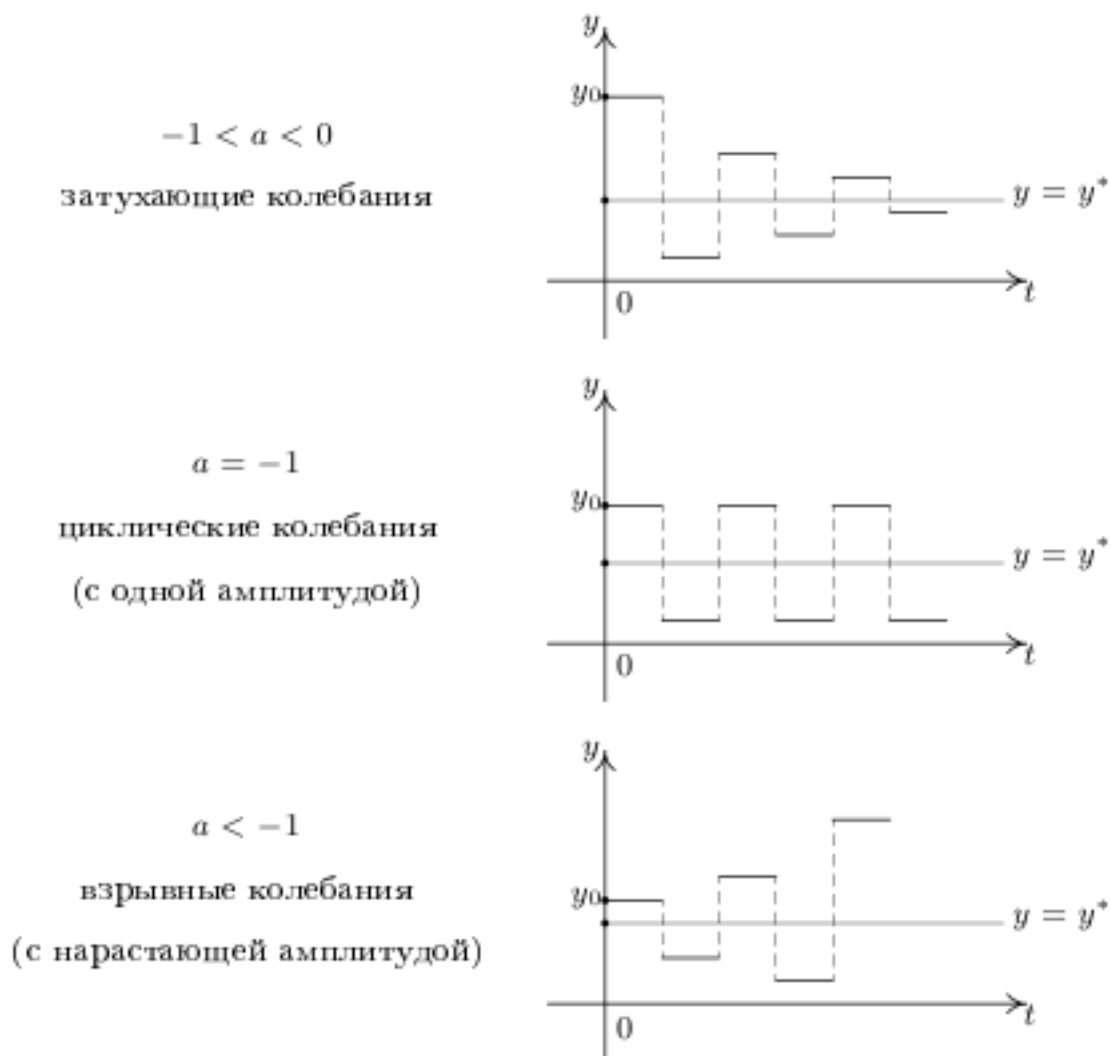


Рис.2.4. Поведение траекторий уравнения (2.12) при  $a < 0$

**Пример 2.4.** Решим уравнение  $y_{t+1} = 0,5y_t + 10$ . Здесь  $a = 0,5$ ,  $b = 10$ , точка равновесия  $y^* = 20$ , общее решение соответствующего однородного уравнения  $x_{t+1} = 0,5x_t$  — это  $x_t = C(0,5)^t$ . Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_t = y(t, C) = C(0,5)^t + 20.$$

Решение с начальным условием  $y|_{t=0} = y_0$  получается отсюда при  $C = y_0 - y^* = y_0 - 20$  (см.(2.14)):

$$y_t = (y_0 - 20)(0,5)^t + 20.$$

Все они сходятся к неподвижной точке  $y^* = 20$ , которая устойчива.

**(3)** Можно получить явную формулу для решения общего неавтономного уравнения (2.11). Однако она оказывается слишком громоздкой

(см. задачу 2.22) и практически удобнее непосредственно использовать метод, описанный в предыдущем пункте.

Ограничимся рассмотрением линейного уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + b(t) \quad (2.16)$$

с постоянным коэффициентом  $a$ . Сначала обоснуем метод решения.

2.4. Пусть  $\{\bar{y}_t\}$  – любое частное решение уравнения (2.16). Тогда решение этого уравнения с начальной точкой  $y_0$  представимо в виде

$$y_t = (y_0 - \bar{y}_0)a^t + \bar{y}_t, \quad t \in \mathbf{Z}_+ \quad (2.17)$$

(общее решение однородного уравнения плюс частное решение неоднородного). Так как  $y_0$  здесь произвольно, то эта формула дает общее решение уравнения (2.16).

Доказательство практически не отличается от рассуждения пункта (1). Пусть  $\{y_t\}$  – искомое решение, стартующее из  $y_0$ . Положим  $x_t = y_t - \bar{y}_t$ . Тогда  $x_0 = y_0 - \bar{y}_0$  и

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_{t+1} - \bar{y}_{t+1} = ay_t + b(t) - \bar{y}_{t+1} = \\ &= ax_t + a\bar{y}_t + b(t) - \bar{y}_{t+1} = ax_t, \end{aligned}$$

так как  $\{\bar{y}_t\}$  удовлетворяет уравнению (2.16). Для  $x_t$  получили однородное уравнение с решением  $x_t = (y_0 - \bar{y}_0)a^t$ . Обратной подстановкой получаем формулу (2.17).  $\square$

При использовании утверждения 2.4 основная трудность состоит в подборе частного решения. Два последующих утверждения содержат соответствующие рецепты для некоторых типичных случаев.

2.5. Пусть  $b(t) = P(t)$  – некоторый полином от  $t$ . Тогда уравнение (2.16) имеет частное решение вида  $\bar{y}_t = Q(t)$ , где  $Q(t)$  – тоже полином

- той же степени, что и  $P$ , если  $a \neq 1$ ,
- степени на единицу выше  $P$ , если  $a = 1$ .

Иллюстрируем это утверждение на примере уравнения  $y_{t+1} = ay_t + t$ , где  $b(t) = t$ . Попробуем искать его частное решение в виде  $\bar{y}_t = Q(t) = At + B$ , где  $A, B$  – неопределенные коэффициенты. Подставляя  $\bar{y}_t$  в уравнение, приходим к равенству

$$B + A(t + 1) = a(At + B) + t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  слева и справа, получим систему для определения  $A, B$ :

$$aA + 1 = A, \quad A + B = aB.$$

Если  $a \neq 1$ , то отсюда находим

$$A = \frac{1}{1-a}, \quad B = -\frac{1}{(1-a)^2}.$$

Поэтому

$$\bar{y}_t = \frac{t}{1-a} - \frac{1}{(1-a)^2}, \quad \bar{y}_0 = -\frac{1}{(1-a)^2}$$

и общее решение найдется по формуле (2.17).

Если же  $a = 1$ , то частное решение будем искать в виде  $\bar{y}_t = At^2 + Bt + C$ . Вновь подставляя в уравнение, приходим к системе для определения неизвестных коэффициентов:

$$2A + B = B + 1, \quad A + B = 0, \quad C = 0.$$

Отсюда находим  $A = 1/2$ ,  $B = -1/2$  и получаем частное решение

$$\bar{y}_t = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}, \quad \bar{y}_0 = 0$$

(проверьте). Остается вновь воспользоваться формулой (2.17).

2.6. Пусть  $b(t) = \lambda^t P(t)$  – произведение степени числа  $\lambda \neq 0$  и полинома от  $t$ . Тогда уравнение (2.16) имеет частное решение вида  $\bar{y}_t = \lambda^t Q(t)$ , где  $Q(t)$  – полином

- той же степени, что и  $P$ , если  $\lambda \neq a$ ,
- степени на единицу выше  $P$ , если  $\lambda = a$ .

*Доказательство.* Подстановка  $\bar{y}_t$  в уравнение

$$y_{t+1} = ay_t + \lambda^t P(t) \tag{2.18}$$

после сокращения на  $\lambda^t$  приводит к равенству

$$\lambda Q(t+1) = aQ(t) + P(t).$$

Нам достаточно установить существование полинома  $Q(x)$  от переменной  $x \in \mathbf{R}$ , удовлетворяющего аналогичному равенству

$$\lambda Q(x+1) - aQ(x) = P(x). \tag{2.19}$$



Мы сделаем это индукцией по степени  $n$  полинома  $P$ .

а) Пусть  $\lambda \neq a$ . Рассмотрим случай  $n = 0$ , когда  $P$  есть просто постоянная:  $P(x) \equiv c$ . Выберем тогда и  $Q(x) = c_0 = \text{const}$ . Из уравнения (2.19) получим, что  $c_0 = c/\lambda - a$ , и тем самым для  $n = 0$  нужное свойство установлено.

Допустим теперь, что оно верно для всех полиномов  $P(x)$  степени  $\leq n - 1$ . Выведем отсюда его справедливость для  $P(x)$  степени  $n$ .

Любой такой полином можно записать в виде

$$P(x) = Ax^n + R(x) \quad (A, R \text{ заданы}), \quad (2.20)$$

где  $R(x)$  – полином степени  $\leq n - 1$ . В соответствии с утверждением 2.6, возьмем тогда  $Q(x)$  в виде

$$Q(x) = Bx^n + S(x) \quad (B, S \text{ искомые}),$$

где  $S(x)$  – некоторый полином степени  $\leq n - 1$ . Подстановка этих выражений в уравнение (2.19) после перегруппировки членов приводит к равенству

$$\begin{aligned} \lambda S(x+1) - aS(x) &= R(x) + Ax^n - \\ &- B[\lambda(x+1)^n - ax^n]. \end{aligned}$$

Выбором числа  $B$  коэффициент при  $x^n$ , равный  $A - B(\lambda - a)$ , можно обратить в нуль, что дает  $B = A/\lambda - a$ . Тем самым мы приходим к уравнению относительно  $S(x)$  типа (2.19), в котором все полиномы имеют степень  $\leq n - 1$ . Согласно предположению индукции, это уравнение разрешимо и утверждение для случая  $\lambda \neq a$  доказано.

б) Пусть  $\lambda = a$ . Если  $n = 0$ , т.е.  $P \equiv c$ , то полином  $Q(x) = cx/\lambda$  удовлетворяет уравнению (2.19).

Допустим, что уравнение (2.19) имеет решение относительно  $Q$  (степени  $n$ ) для всех полиномов  $P$  степени  $\leq n - 1$  и вновь перейдем к случаю степени  $n$  и представлению  $P$  в виде (2.20). Теперь ищем  $Q$  в виде

$$Q(x) = Cx^{n+1} + S(x),$$

где степень  $S \leq n$ . В этом случае подстановка в (2.19) дает равенство

$$aS(x+1) - aS(x) = R(x) + Ax^n - aC[(x+1)^{n+1} - x^{n+1}].$$

В квадратных скобках члены степени  $n + 1$  сокращаются, а общий коэффициент при  $x^n$  равен  $A - aC(n + 1)$ , где  $A, a$  известны. Выбором  $C = A/a(n + 1)$  вновь обратим его в нуль. Тогда правая часть уравнения окажется полиномом степени  $\leq n - 1$ , а такое уравнение имеет решение по предположению индукции.

Практически частные решения находят методом неопределенных коэффициентов, задавая степень искомого полинома в соответствии с утверждениями 2.5, 2.6.

**Пример 2.5.** Найдем частное решение уравнения  $y_{t+1} = ay_t + t\lambda^t$  при  $\lambda \neq a$ . Здесь  $P(t) = t$  и мы должны искать его в виде  $\bar{y}_t = \lambda^t(At + B)$ . Подставляя в уравнение, получим равенство

$$\lambda^{t+1}[A(t + 1) + B] = a\lambda^t(At + B) + t\lambda^t,$$

или, после сокращения на  $\lambda^t$ ,

$$\lambda At + \lambda A + \lambda B = (aA + 1)t + aB.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  слева и справа, получаем систему для определения коэффициентов  $A, B$ :

$$\lambda A = aA + 1, \quad \lambda A + \lambda B = aB.$$

Отсюда находим

$$A = 1/\lambda - a, \quad B = -\lambda/(\lambda - a)^2,$$

а вместе с ними и частное решение.

При  $\lambda = a$  частное решение можно найти в виде  $\bar{y}_t = \lambda^t(Ct^2 + Dt)$ .

**Замечание.** Согласно утверждению 2.6, общее решение уравнения (2.18) имеет вид

$$y_t = (y_0 - Q(0))a^t + \lambda^t Q(t),$$

где  $Q(t)$  – некоторый полином. Хотя данное уравнение неавтономно, поведение его решений при  $t \rightarrow \infty$  представляет интерес. Нетрудно показать, что здесь имеются следующие возможности:

- при  $|a| < 1, \quad |\lambda| < 1 \quad y_t \rightarrow 0 \quad \forall y_0$ ;
- при  $a = 1, \quad |\lambda| < 1 \quad y_t \rightarrow y_0 - Q(0) \quad \forall y_0$ ;

- при  $a = -1$ ,  $|\lambda| < 1$  сходимости нет, но траектории не разбегаются от тренда (тенденции)  $y = 0$ , а колеблются около него;
- в остальных случаях траектории расходятся.

Отметим, что решения уравнения, описанного в утверждении 2.5, являются расходящимися.

## Задачи

В задачах (2.7) – (2.20) требуется:

- 1) найти общее решение (с произвольным начальным условием);
- 2) получить из него частное решение, соответствующее начальному условию, если оно указано;
- 3) исследовать на устойчивость точки равновесия (для характеристики типов поведения траекторий используйте рис.2.3 и рис.2.4).

**2.7.**  $y_{t+1} = -3y_t + 4, \quad y_0 = 4.$

**2.8.**  $y_{t+1} - 0,2y_t = 6, \quad y_0 = 4.$

**2.9.**  $2y_{t+1} - y_t = 6, \quad y_0 = 7.$

**2.10.**  $y_{n+1} = 2y_n - 10, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y|_{n=0} = y_0.$

**2.11.**  $y_{n+1} = y_n, \quad n = 0, 1, \dots.$

**2.12.**  $y_t = 0,5y_{t-1} + 1, \quad t = 1, 2, \dots, \quad y|_{t=1} = y_0.$

**2.13.**  $y_{t+1} - 0,1y_t = 9.$

**2.14.**  $y_t - y_{t-1} = -1.$

**2.15.**  $y_{t+1} - 5y_t = -2.$

**2.16.**  $y_{t+1} = \frac{1}{3}y_t + 6, \quad y_0 = 1.$

**2.17.**  $y_{t+1} = -\frac{1}{4}y_t + 5, \quad y_0 = 2.$

**2.18.**  $y_{t+1} = -2y_t + 9, \quad y_0 = 4.$

**2.19.**  $y_{t+1} - y_t = 3, \quad y_0 = 5.$

**2.20.** Рассмотреть уравнения из задачи 2.1.

**2.21.** Доказать свойства сходимости траекторий уравнения (2.18), описанные в замечании после примера 2.5.

*Указание.* Использовать правило Лопиталья.

**2.22.** Неавтономные линейные уравнения.

а) Какие решения имеет разностное уравнение  $y_{t+1} = b(t)$ , где  $b(t)$  – функция, определенная на  $\mathbf{Z}_+$ ?

б) Используя метод итераций, показать, что однородное уравнение  $y_{t+1} = a(t)y_t$  имеет общее решение вида

$$y_t = a(0)a(1) \dots a(t-1)y_0 = \prod_{i=0}^{t-1} a(i)y_0,$$

где  $\prod$  символ произведения.

в) Показать, что общее решение уравнения  $y_{t+1} = a(t)y_t + b(t)$  имеет вид

$$y_t = \prod_{i=0}^{t-1} a(i)y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} b(j) \prod_{i=j+1}^{t-1} a(i).$$

*Указание.* Подставьте  $y_t$  в уравнение.

**2.23.** Решить уравнения и исследовать асимптотику решений (их поведение при  $t \rightarrow \infty$ ) :

а)  $y_{t+1} = \frac{\alpha}{t+1}y_t$ ;

б)  $y_{t+1} = ay_t + t$ ;

в)  $y_{t+1} = (t+1)y_t + b$ ;

г)  $y_{t+1} = ay_t + \beta^t$ ;

д)  $y_{t+1} = \alpha^t y_t + b$ .

## 2.3. Паутинообразные модели рынка

### 2.3.1. Понятие устойчивости рыночного равновесия

Рассмотрим рынок товара, который характеризуется функциями спроса  $Q_D = f(P)$  и предложения  $Q_S = g(P)$ . Предположим, что эти функции таковы, что существует одна точка рыночного равновесия, т.е. уравнение

$$Q_D = Q_S, \quad \text{т.е.} \quad \underbrace{f(P)}_{\text{спрос}} = \underbrace{g(P)}_{\text{предложение}} \quad (2.21)$$

имеет единственное решение  $P^*$ , т.е. линии спроса и предложения пересекаются в одной точке  $E$  с координатами  $(Q^*, P^*)$ , где  $Q^* = f(P^*) = g(P^*)$ .

Представим себе, что в силу каких-либо причин цена отклонилась от равновесного значения  $P^*$ , т.е. рынок вышел из состояния равновесия. Если с течением времени рынок возвращается к состоянию равновесия в точке  $E$  и цена принимает равновесное значение  $P^*$ , или – что более реалистично – *с течением времени состояние рынка неуклонно приближается к равновесному, а цена – к значению  $P^*$ , – то равновесие рынка называют устойчивым*. В противном случае равновесие называют неустойчивым.

Само по себе существование точки равновесия в модели (2.21) не гарантирует устойчивости. С помощью этой статической модели невозможно решить, обладает ли данный рынок свойством устойчивости равновесия – ведь сама постановка вопроса об устойчивости имеет явно динамический характер. Действительно, свойство устойчивости можно переформулировать следующим образом:

*состояние рыночного равновесия устойчиво, если при отклонении в начальный период времени  $t = 0$  цены  $P_0$  от равновесной, т.е. при  $P_0 \neq P^*$ , её значения сходятся к последней с течением времени:  $P_t \rightarrow P^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .*

Ясно, что вопрос об устойчивости или неустойчивости равновесия можно анализировать только с помощью динамических моделей рынка.

Проблема устойчивости или, как ещё говорят, *стабильности рыночного равновесия*, имеет важное экономическое значение. Если рыночное

равновесие устойчиво под влиянием лишь своих внутренних сил, т.е. за счёт саморегуляции, то это означает, что дополнительное внешнее регулирование рынка не требуется: рынок сам поддерживает свою сбалансированность. Если же равновесие неустойчиво, то регулирование рынка становится настоятельно необходимым.

С формальной точки зрения содержательное условие рыночного равновесия означает асимптотическую устойчивость точки равновесия динамической модели рынка.

### 2.3.2. Паутинообразная модель рынка

Рассмотрим простейшую динамическую модель рынка некоторого товара. В этой модели предполагается, что объём спроса в любой текущий момент времени зависит от уровня цены этого периода –  $P_t$ , а предложение реагирует на изменение цены с некоторым запаздыванием и зависит от уровня цены в предшествующем периоде –  $P_{t-1}$ . Возможны различные интерпретации этого запаздывания. Например, можно считать, что производителям необходим запас времени, чтобы перейти на новый уровень выпуска продукции после реагирования на изменение уровня рыночной цены. Другой вариант интерпретации – производители определяют в период  $t - 1$  объём предложения следующего периода, предполагая, что цена периода  $t - 1$  сохранится и в период  $t$ .

Обозначим через  $Q_{Dt}$  и  $Q_{St}$  объёмы спроса и предложения в период  $t$ . Предположения модели означают, что функция текущего спроса зависит от  $P_t$ , т.е.

$$Q_{Dt} = f(P_t), \quad (2.22)$$

а функция текущего предложения – от  $P_{t-1}$ :

$$Q_{St} = g(P_{t-1}). \quad (2.23)$$

Следующее допущение модели состоит в том, что изменение цены во времени происходит так, чтобы рынок был сбалансирован в каждом периоде, т.е. текущий спрос равнялся текущему предложению:

$$Q_{Dt} = Q_{St}, \quad \text{т.е.} \quad f(P_t) = g(P_{t-1}). \quad (2.24)$$

Это допущение означает, что цена данного товара является очень гибкой – способной уравнивать спрос с предложением в любом периоде.

Если начальный уровень цены  $P_0$  известен, то из последнего рекуррентного уравнения определяется траектория цены, а по ней – совпадающие между собой траектории объемов спроса и предложения.

В совокупности сделанные допущения позволяют дать вальрасовскую интерпретацию модели: рынок регулирует некий аукционист, который сначала объявляет цену товара, после чего покупатели и продавцы совершают условные сделки и сообщают их результаты – объемы спроса-предложения – аукционисту; если они оказались не сбалансированными, то аукционист объявляет новую цену, стремясь сбалансировать рынок. Окончательные сделки совершаются после достижения равновесия.

Чтобы упростить анализ, возьмём функции спроса и предложения линейными, т.е.

$$f(P) = a - bP, \quad g(P) = c + dP, \quad (2.25)$$

где  $a, b, c, d$  – параметры. Заметим, что с экономической точки зрения естественно считать, что  $b > 0, d > 0$ , т.е. прямые спроса и предложения имеют нормальный наклон: у спроса отрицательный (и равный  $(-1/b)$ ), а у предложения – положительный  $(1/d)$ . С учётом (2.25) равенства (2.22)–(2.24) примут следующий вид:

$$\begin{cases} Q_{Dt} = a - bP_t, & Q_{St} = c + dP_{t-1}, \\ a - bP_t = c + dP_{t-1}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Уравнения (2.26) представляют собой модель рынка, которая носит название *паутинообразной*. Основным в ней является последнее разностное уравнение для определения рыночной цены, обеспечивающей в каждом периоде равенство спроса и предложения.

Чтобы найти решение этого уравнения, перепишем его сначала в следующем виде:

$$P_t = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b} P_{t-1}. \quad (2.27)$$

**Шаг 1.** Находим точку равновесия данного уравнения, т.е. не зависящее от времени постоянное решение  $P_t = P^* \forall t$ . Заменяя в (2.27)  $P_{t-1}$  и  $P_t$  на  $P^*$ , получаем уравнение

$$P^* = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b} P^* \quad (2.27)$$

Отсюда находим искомое значение цены  $P^*$ :

$$P^* = \frac{a - c}{b + d}. \quad (2.28)$$

Это значение  $P > 0$  при  $a > c$ , что вполне реалистично.

Заметим, что равновесное решение динамической модели совпадает с ценой рыночного равновесия в статической модели (2.21). В этом легко убедиться, если приравнять функции спроса и предложения (2.25).

Итак, в данной модели рынка имеется одна точка равновесия.

**Шаг 2.** Делаем замену переменной, положив

$$y_t = P_t - P^*. \quad (2.29)$$

При  $t = 0$  получаем, что  $y_0 = P_0 - P^*$ , т.е.  $y$  принимает известное значение, поскольку начальный уровень цены  $P_0$  предполагается известным.

Найдём уравнение, которому удовлетворяет новая переменная:

$$\begin{aligned} y_t = P_t - P^* &= \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b}P_{t-1} - P^* = \\ &= \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b}(y_{t-1} + P^*) - P^* = -\frac{d}{b}y_{t-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $y$  удовлетворяет однородному рекуррентному уравнению

$$y_t = -\frac{d}{b}y_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$y_0 = P_0 - P^* \text{ задано.}$$

Ясно, что решением этого уравнения является геометрическая последовательность со знаменателем  $(-d/b)$ :

$$y_t = y_0 \left(-\frac{d}{b}\right)^t = (P_0 - P^*) \left(-\frac{d}{b}\right)^t.$$

**Шаг 3** состоит в возвращении к исходной переменной с помощью равенства (2.29):

$$P_t = P^* + y_t = P^* + (P_0 - P^*) \left(-\frac{d}{b}\right)^t. \quad (2.30)$$



Эта формула и определяет траекторию изменения цены в данной модели. Из неё сразу следует, что рыночная цена  $P_t$  будет колебаться около равновесного уровня  $P^*$ , так как множитель  $(-d/b)^t$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако качественный характер этих колебаний и устойчивость равновесия зависят от отношений параметров  $d, b$ , которые задают наклоны прямых спроса и предложения.

Возможны три случая.

### 1) Затухающие колебания цены и устойчивость

Отношение  $d/b < 1$  или, иначе,  $d < b$ . В этом случае

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

цена сходится к равновесной –

$$P_t \rightarrow P^* \text{ при } t \rightarrow \infty$$

и состояние равновесия асимптотически устойчиво. Колебания относительно  $P^*$  происходят с уменьшающейся амплитудой и являются *затухающими*.

### 2) Взрывные колебания цены и неустойчивость

Отношение  $d/b > 1$ , т.е.  $d > b$ . В этом случае траектория цены, колеблясь, будет всё более удаляться от уровня  $P^*$ , поскольку  $(-d/b)^t \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Такие колебания с нарастающей амплитудой называются взрывными.

### 3) Циклические колебания и неустойчивость

При  $d = b$  цена поочерёдно принимает лишь два значения, отклоняясь от равновесной то в большую, то в меньшую сторону на одну и ту же величину. В этой ситуации говорят, что цена совершает регулярные или циклические колебания около равновесного уровня. Заметим что, поскольку совпадающие между собой объёмы спроса и предложения связаны с ценой равенствами (2.24), то в каждом из указанных трёх случаев поведение траектории объёма товара  $Q_t (= Q_{Dt} = Q_{St})$  относительно равновесного уровня  $Q^*$  вполне аналогично поведению цены  $P_t$  относительно  $P^*$ .

Очевидно, что в случае 2) устойчивости нет, а в 3) есть просто устойчивость.

Хотя все эти выводы следуют непосредственно из формулы (2.30) для последовательности  $P_t$ , полезно обратиться к графической иллюстрации модели. На рисунках 2.5.1 – 2.5.3 слева изображены прямые спроса и предложения при различных наклонах, а справа – схематичный график зависимости цены от времени (т.е. траектории переменной  $P$ ).

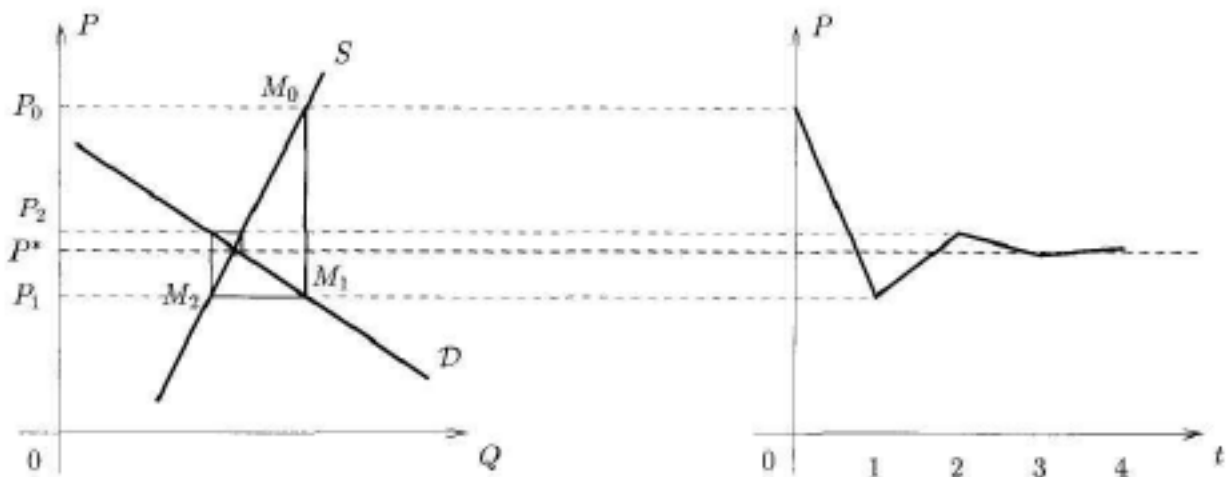


Рис.2.5.1. Затухающие колебания цены и устойчивость

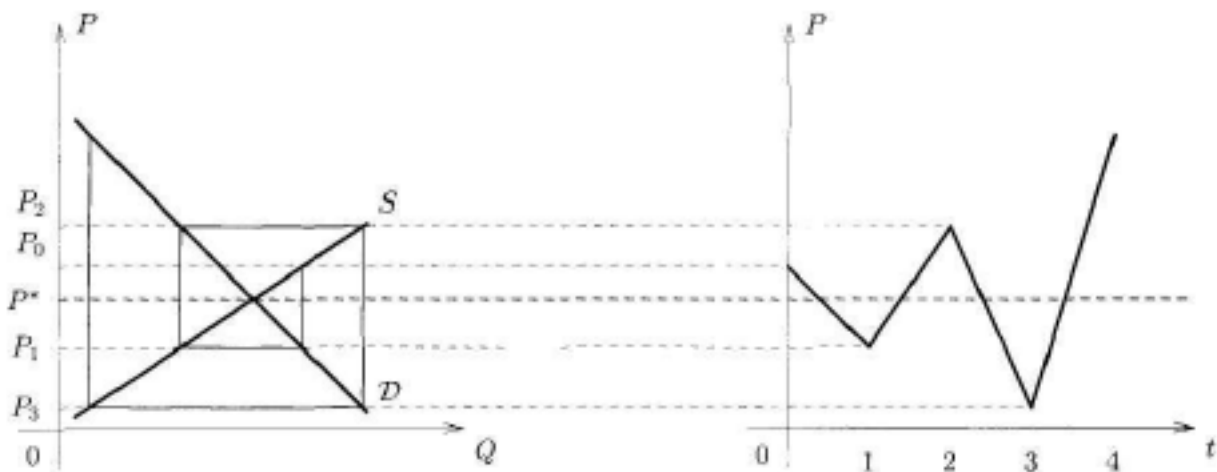


Рис.2.5.2. Взрывные колебания цены и неустойчивость

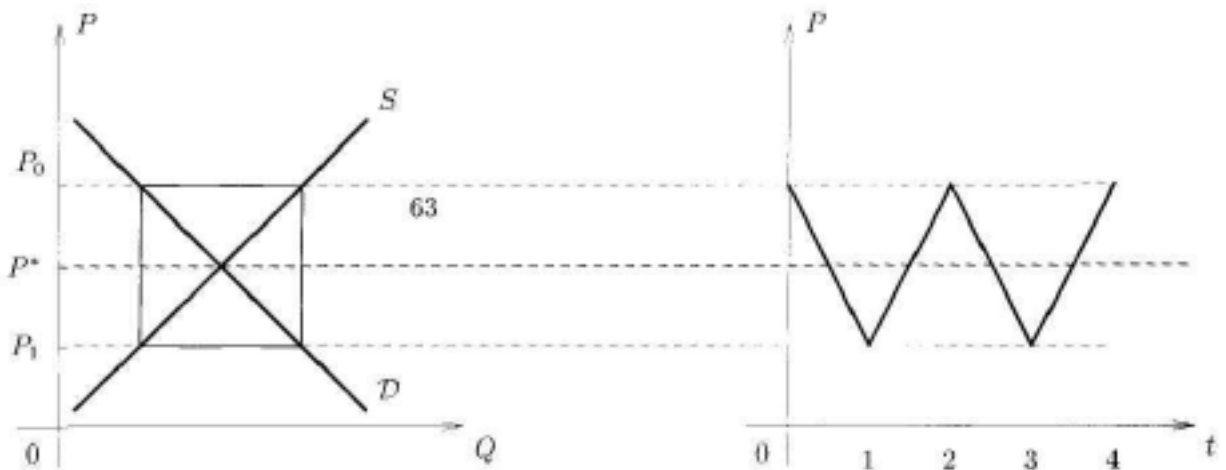


Рис.2.5.3. Циклические колебания и неустойчивость

Прямые спроса и предложения – это графики функций, обратных к (2.25). Их уравнения таковы:

- прямая спроса –

$$P = -\frac{1}{b}Q + \frac{a}{b}$$

с наклоном  $-1/b < 0$ ;

- прямая предложения –

$$P = \frac{1}{d}Q - \frac{c}{d}$$

с наклоном  $1/d > 0$ .

В случае 1) абсолютное значение наклона прямой спроса  $1/b$  меньше наклона прямой предложения (т.е.  $b > d$ ) и, следовательно, последняя изображается более круто по отношению к оси  $OQ$ . Проследим на графике рисунка слева, как происходит процесс изменения цены.

Начальной цене  $P_0$  соответствует в силу (2.26) предложение  $Q_{S1} = c + dP_0$  (точка  $M_0$  на прямой  $S$ ). Возникает избыток предложения и равновесие на рынке устанавливается за счёт уменьшения цены до уровня  $P_1$  (точка  $M_1$  на графике  $D$ ). Новой цене  $P_1$  соответствует объём предложения  $Q_{S2} = c + dP_1$  (точка  $M_2$ ). Теперь возникает дефицит предложения и равенство со спросом приводит к увеличению цены до уровня  $P_2$  (точка  $M_3$  на прямой спроса). Далее процесс взаимодействия спроса и

предложения за счёт изменения рыночной цены повторяется. Последовательное соединение точек  $M_0, M_1, \dots$  отрезками приводит к закручивающейся “спирали”, напоминающей вид паутины (отсюда и происходит название модели). Соответственно, справа на графике траектории амплитуда колебаний цены около  $P^*$  со временем затухает.

В случаях 2), 3), когда абсолютный наклон прямой спроса больше и равен наклону прямой предложения “картинки” строятся по описанной схеме, но имеют другой вид.

Таким образом, даже при нормальном наклоне линий спроса и предложения запаздывание в реакции предложения на изменение цены может приводить к нестабильности рынка. Заметим, что по той же схеме можно проанализировать и аномальные ситуации в расположении графиков спроса и предложения.

Недостатки паутинообразной модели достаточно очевидны. Во-первых, расходящиеся и циклические колебания (случаи 2, 3) на практике не наблюдаются, поскольку производители учатся на своих ошибках: рано или поздно они заметят, что их ожидания, основанные на сохранении цены прошлого периода, не оправдываются и они изменят процедуру определения ожидаемой цены. Например, производители могут определять предложение товара, исходя из средневзвешенных цен нескольких предшествующих периодов.

Во-вторых, в модели не учтено воздействие совокупного поведения всех производителей. Представим себе, например, что речь идёт о рынке картофеля и пусть в какой-то год его предложение было сравнительно небольшим, а цена – высокой. Тогда можно предположить, что отдельный фермер в этой ситуации будет расширять посадки картофеля, ожидая, что его высокая цена сохранится. Однако, если все фермеры поступят таким образом, то на следующий год под влиянием возросшего предложения цена картофеля снизится.

Наконец, совсем не обязательно исходить из предположения гибкости цены данного товара и совпадения спроса с предложением в каждом периоде. Изменение цены может происходить и в неравновесной ситуации под влиянием избыточного спроса, как, например, в модели следующего пункта.

### 2.3.3. Паутинообразная модель с обучением

Рассмотрим модификацию простейшей паутинообразной модели, в которой цена на рынке устанавливается продавцами, стратегия которых в каждом периоде состоит в ориентации на некоторое средневзвешенное значение между спросом и предложением в предшествующем периоде. Эта стратегия описывается условием

$$Q_{St+1} = \alpha Q_{St} + (1 - \alpha)Q_{Dt}, \quad (2.31)$$

где  $0 < \alpha < 1$  – параметр, характеризующий стратегию продавцов. Тем самым продавцы пытаются приспособиться к колебаниям цены, которые “обучают” его делать более точный прогноз предложения.

При линейных динамических функциях

$$Q_{Dt} = a - bP_t, \quad Q_{St} = c + dP_t$$

соотношение (2.31) принимает вид

$$c + dP_{t+1} = \alpha(c + dP_t) + (1 - \alpha)(a - bP_t).$$

Оно преобразуется к разностному уравнению

$$P_{t+1} = AP_t + C,$$

где

$$A = \frac{\alpha d - (1 - \alpha)b}{d}, \quad C = \frac{(1 - \alpha)(a - c)}{d}.$$

Легко проверить, что оно имеет ту же точку равновесия  $P^*$  (см.(2.28)), но теперь условие глобальной устойчивости  $|A| < 1$  всегда можно обеспечить выбором параметра  $\alpha$  в диапазоне

$$\frac{b - d}{b + d} < \alpha < 1$$

(проверьте).

Таким образом, более гибкий учет колебаний, чем в модели (2.23), позволяет продавцам стабилизировать рынок *при любых угловых коэффициентах прямых спроса и предложения.*

## Задачи

**2.24.** С помощью паутиной и фазовой диаграмм исследовать на устойчивость паутинообразную модель рынка при следующих значениях параметров функций спроса и предложения:

- а)  $a = 100, \quad b = 10, \quad c = 25, \quad d = 5;$
- б)  $a = 100, \quad b = 10, \quad c = 10, \quad d = 20;$
- в)  $a = 100, \quad b = 10, \quad c = 20, \quad d = 10.$

**2.25.** Найти решения паутинообразных моделей из задачи 2.24.

**2.26.** Исследовать на устойчивость паутинообразные модели с обучением для значений параметров из задачи 2.24.

*Указание.* Дать анализ при различных значениях параметра  $\alpha$  из формулы (2.31).

**2.27.** Рассмотреть модификацию паутинообразной модели, в которой продавцы ожидают в период  $t + 1$  цены

$$P_t + \gamma(P^* - P_t),$$

где  $\gamma \in [0, 1]$  и в каждом периоде рынок сбалансирован.

а) Дать интерпретацию стратегии ожидания продавцов и параметра  $\gamma$ .

б) Составить разностное уравнение модели и исследовать на устойчивость в зависимости от  $\gamma \in [0, 1]$ .

в) Сравнить полученные выводы с их аналогами из основной паутинообразной модели и модели с обучением.

**2.28.** Исследовать модифицированную паутинообразную модель рынка из предыдущей задачи при значениях параметров из задачи 2.24.

**2.29.** Рассмотреть модель рынка с *адаптивными ожиданиями*, в которой динамика рыночной цены описывается уравнением

$$P_{t+1} = P_t - \gamma(Q_{St} - Q_{Dt}),$$

а динамические функции спроса и предложения линейны и не содержат запаздывания.

- а) Дать интерпретацию параметру  $\gamma > 0$ .
- б) Получить решение и исследовать на устойчивость аналитически и графически.
- в) Рассмотреть модель с параметрами  $a = 21, b = 2, c = -3, d = 6$  при различных значениях параметра  $\gamma$ .
- г) Исследовать адаптивную модель при значениях параметров из задачи 2.24.

## 2.4. Однопродуктовая модель Леонтьева

Эта макро модель описывает распределение валового продукта  $X_t$  на текущие затраты производства  $Z_t$ , инвестиции  $I_t$  и непроизводственное потребление  $C_t$  :

$$X_t = Z_t + I_t + C_t. \quad (2.32)$$

Затраты принимаются пропорциональными объему выпуска:  $Z_t = aX_t$ , где  $a \in (0, 1)$  – коэффициент прямых затрат, который можно интерпретировать как долю валового выпуска, идущую на производство.

Инвестиции  $I_t$  пропорциональны приросту выпуска в период  $t$ :

$$I_t = b\Delta X_t, \text{ где } \Delta X_t = X_{t+1} - X_t, \quad (2.33)$$

$b > 0$  – параметр, имеющий смысл инвестиций, необходимых для единичного прироста выпуска продукта. Именно соотношение (2.33) придает динамику модели.

Если считать  $C_t$  экзогенной переменной, то равенство (2.32) примет вид *открытой* модели Леонтьева:

$$X_t = aX_t + b(X_{t+1} - X_t) + C_t. \quad (2.34)$$

Её можно преобразовать к стандартному линейному разностному уравнению

$$X_{t+1} = AX_t - BC_t, \quad (2.35)$$

где введены обозначения коэффициентов

$$A = \frac{1 - a + b}{b}, \quad B = \frac{1}{b}.$$

Легко получить его решение при  $C_t \equiv C \equiv const$  (сделайте это). Заметим, что коэффициент  $A > 1$ , так что в этом случае соответствующая точка равновесия  $X^* = BC/(A - 1)$  неустойчива, причем при  $X_0 < X^*$  решение становится отрицательным. Это накладывает ограничение на потребление  $C$ : оно не должно превосходить величины  $X_0(A - 1)/B$ .

Посмотрим теперь, какой должна быть траектория выпуска, чтобы обеспечить рост потребления с постоянным темпом  $\rho$ . В этом случае

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \rho, \quad \text{т.е. } C_t = C_0\rho^t.$$

Для нахождения решения воспользуемся утверждением 2.6, считая, что  $\rho \neq A$ . Частное решение неоднородного уравнения (2.35) при такой стратегии потребления ищем в виде  $\bar{X}_t = c\rho^t$ , где  $c$  – неопределенный коэффициент. Подстановка в уравнение после сокращения на  $\rho^t$  дает  $c\rho = Ac + BC_0$ , откуда получаем  $c = BC_0/(\rho - A)$ . Следовательно, общее решение таково (см. утверждение 2.4):

$$X_t = (X_0 - C_0)A^t + \frac{BC_0}{\rho - A}\rho^t.$$

Мы видим, что при любом темпе роста потребление  $\rho$  (и  $C_0 < X_0$ ) выпуск продукции неограниченно растет с течением времени.

Укажем модификации описания процесса инвестиций.

(1) *Модель с запаздыванием инвестиций.* Равенство (2.33) означает, что инвестиции данного года вызывают пропорциональный прирост производства в том же году, т.е. нет запаздывания между капиталовложениями и их эффектом. Чтобы учесть это запаздывание на  $\tau$  лет, можно заменить (2.33) на равенство

$$I_t = b(X_{t+\tau} - X_t).$$

(2) *Индукцированные инвестиции* – это капиталовложения, которые стимулируются приростом выпуска: прирост выпуска позволяет делать инвестиции (логика здесь обратная к (2.33)). Такие инвестиции можно описать зависимостью

$$I_t = b(X_t - X_{t-\tau}),$$

где  $\tau \in \mathbf{Z}_+$  (например, равно 1).



Учет индуцированных инвестиций называют *эффектом акселератора* – стимулирующего влияния прироста производства (или дохода) на объем капиталовложений.

**(3) Модель с динамикой капитала.** Дополним модель (2.34) введением фактора производства – капитала (или производственных фондов). Предположим, что инвестиции расходуются на прирост капитала и его амортизацию в том же году, т.е.

$$I_t = b(K_{t+1} - K_t) + mK_t,$$

где  $m$  – норма амортизации. В этом же случае дискретная однопродуктовая модель примет вид

$$X_t = aX_t + b(K_{t+1} - K_t) + mK_t + C_t,$$

или

$$K_{t+1} = K_t + \frac{1}{b}[(1 - a)X_t - mK_t - C_t]. \quad (2.36)$$

Это разностное уравнение позволяет найти траекторию капитала, обеспечивающую экзогенно заданные программы выпуска  $\{X_t\}$  и потребления  $\{C_t\}$ .

Можно упростить модель (2.36), если предположить, что чистый выпуск продукции  $Y_t = (1 - a)X_t$  пропорционален объему капитала, т.е.

$$Y_t = AK_t, \quad A > 0. \quad (2.37)$$

Это соотношение представляет собой линейную производственную функцию, подстановка которой в (2.36) приводит к уравнению

$$K_{t+1} = \alpha K_t - \beta C_t, \quad (2.38)$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{A - m}{b}, \quad \beta = \frac{1}{b}.$$

Для ясности рассмотрим числовой пример и разберемся с размерностью переменных и параметров.

Если объем выпуска продукции и капитал измеряются в стоимостном выражении (в некоторых фиксированных ценах), то размерность левой части в (2.37) равна ден.ед./в год. Следовательно, коэффициент фондотдачи (предельной производительности капитала)  $A$  имеет размерность

$1/\text{время}$ , а обратная величина  $1/A$  – капиталоемкость продукции – имеет размерность времени. Пусть  $1/A = 3$  годам. Далее, если средний срок службы капитала (оборудования, зданий, сооружений и т.д.) составляет в среднем 25 лет, то  $m = \frac{1}{25} = 0,04$  (т.е. 4% в год). Коэффициент фондообразующих затрат  $b$  имеет размерность  $1/\text{время}$ , так как инвестиции представляют собой денежный поток в единицу времени. Допустим, что  $b = \frac{1}{4}$ .

При этих входных данных

$$\alpha = 1 + 4 \left( \frac{1}{3} - 0,04 \right) \approx 2,17 > 1.$$

Поэтому надо ожидать, что при разумных программах потребления траектории уравнения (2.38) будут расходиться.

Отсутствие устойчивости и неограниченный рост являются следствием линейности модели и, в частности, производственной функции (2.37). Если вместо нее взять неоклассическую функцию, скажем  $Y_t = AK_t^\gamma$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , то поведение траекторий и свойства устойчивости изменятся. Заметим, что получающаяся в этом случае модель практически не отличается от неоклассической с формальной точки зрения (см. пример 1.9 и задачу 2.6).

## Задачи

**2.30.** Показать, что открытая модель Леонтьева с запаздыванием инвестиций и акселератором не обладает устойчивостью при постоянном и геометрически растущем потреблении.

**2.31.** Найти решение модели (2.32) при постоянном потреблении и при возрастающем с темпом  $\rho$ .

**2.32.** Рассмотреть *замкнутую* модель Леонтьева, которая получается из открытой модели (2.34) в предположении, что все потребление идет на восстановление рабочей, т.е.  $C_t = wL_t$ ,  $w > 0$ , а затраты труда пропорциональны валовому выпуску:

$$L_t = \beta X_t$$

(заметим, что последнее соотношение можно интерпретировать как производственную функцию).

Найти динамику переменных  $X, C, L$  и исследовать устойчивость.

## 2.5. Нелинейные уравнения: условия глобальной и локальной устойчивости

Линейные автономные уравнения просто решаются, и анализ явных формул для решений обнаруживает небогатый набор возможных типов поведения траекторий (притяжение к единственной точке равновесия, регулярные колебания около нее и расхожимость).

В противовес им нелинейные разностные уравнения допускают нахождение явных решений в почти исключительных случаях. В этом отношении они еще менее податливы, чем их непрерывные аналоги – нелинейные дифференциальные уравнения. Поэтому акцент в изучении нелинейных уравнений смещается в сторону качественных методов. Именно такими методами обнаруживаются типы возможного поведения траекторий, спектр которых намного богаче, чем в линейных уравнениях<sup>1</sup>. Именно это обстоятельство важно с позиций моделирования реальных процессов.

Здесь мы сделаем следующий шаг в направлении качественного анализа, считая, что первый сделан в п.2.1.

Начнем с того, что сменим обозначения на более современные. А именно мы будем рассматривать динамическую систему, состояние которой в каждый период времени  $t \in \mathbf{Z}_+$  характеризуется одной переменной состояния  $x$  (вместо  $y$ ) и изменяется во времени в соответствии с автономным разностным уравнением

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (2.39)$$

Здесь функция  $f(x)$  отображает фазовое множество  $S$  в себя, т. е.  $f : S \rightarrow S$ .

Ясно, что эта смена обозначения не имеет принципиального характера; но далее мы будем больше использовать элементы математического анализа, в котором аргументы функции традиционно обозначаются через  $x$ .

Через  $x^* \in S$  будет обозначаться некоторая точка равновесия уравнения (2.39), или, что тоже, неподвижная точка отображения  $f$ . Это озна-

---

<sup>1</sup>Не менее важное значение приобретают и численные эксперименты, но технология их проведения выходит за рамки данного пособия

чает, с одной стороны, что  $x_t \equiv x^*$  – стационарное решение уравнения (2.39), а с другой – равенство  $f(x^*) = x^*$ .

### 2.5.1. Сжимающие отображения и глобальная устойчивость

Выясним, при каких условиях на  $f$  точка  $x^*$  притягивает все траектории из множества  $\mathbf{S}$ .

Как мы уже знаем, для этого необходимо, чтобы  $x^*$  была единственной точкой равновесия в  $\mathbf{S}$ : наличие любой другой такой точки  $x_t \equiv \bar{x}$  означало бы, что траектория  $x_t \equiv \bar{x}$  не сходится к  $x^*$  (из неподвижной точки система выбраться не может).

Но условия единственности, конечно, не достаточно: линейное уравнение  $x_{t+1} = ax_t + b$  всегда имеет единственную точку равновесия, но ее глобальная устойчивость (притяжение) имеет место только при  $|a| < 1$ , т. е. когда соответствующее отображение  $y = ax + b$  является сжатием (с коэффициентом  $|a|$ ). Это свойство отображения можно выразить двояко: либо в приращениях

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \frac{|a(x_2 - x_1)|}{|x_2 - x_1|} < 1 \quad \forall x_1, x_2, x_1 \neq x_2,$$

либо через оценку производной  $|y'| = |a| < 1$ .

В случае нелинейной функции  $f(x)$  аналогом первого условия является неравенство

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{S}, x_1 \neq x_2, \quad (2.40)$$

а второго – оценка производной

$$|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathbf{S}, \quad (2.41)$$

если  $f$  является гладкой (дифференцируемой) на  $\mathbf{S}$ . Эти неравенства действительно оказываются ключевыми.

Согласно неравенству (2.40), расстояние между любыми точками из  $\mathbf{S}$  всегда больше расстояния между их образами. Отображение с таким свойством естественно назвать *сжатием*. При строгом определении этого понятия возникают варианты, и сначала мы введем понятие сжатия, эквивалентное неравенству (2.40).

**Определение 2.3.** Отображение  $f : \mathbf{S} \rightarrow R$  назовем *просто сжимающим* на  $\mathbf{S}$ , если

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{S}. \quad (2.42)$$

Отметим, что просто сжимающее отображение непрерывно: если в неравенстве (2.42) фиксировать  $x_1$ , то при  $x_2 \rightarrow x_1$  получим,  $f(x_2) \rightarrow f(x_1)$ , что и означает непрерывность  $f$ .

**2.7.** Просто сжимающее отображение  $f : \mathbf{S} \rightarrow R$  на произвольном множестве  $\mathbf{S}$  может иметь не более одной неподвижной точки.

*Доказательство* идет от противного. Предположим, что  $f$  имеет две различные неподвижные точки  $x^*, x^{**} \in \mathbf{S}$ :

$$x^* = f(x^*), \quad x^{**} = f(x^{**}).$$

Оценим расстояние между ними, используя неравенство (2.42) :

$$|x^{**} - x^*| = |f(x^{**}) - f(x^*)| < |x^{**} - x^*|.$$

Но это неравенство невозможно. Значит,  $x^* = x^{**}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$  — просто сжимающее отображение, имеющее неподвижную точку  $x^*$ . Тогда  $x^*$  — глобально устойчива, т. е. любая траектория уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$  с начальной точкой  $x_0 \in \mathbf{S}$  сходится к  $x^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Положим  $y_t = |x_t - x^*|$ . Если  $x_0 = x^*$ , то  $x_t \equiv x^*$ ,  $y_t \equiv 0$  и доказывать нечего. Поэтому пусть  $x_0 \neq x^*$ . Тогда  $y_t > 0 \quad \forall t$  и, в силу простого сжатия  $f$ ,

$$y_{t+1} = |x_{t+1} - x^*| = |f(x_t) - f(x^*)| < |x_t - x^*| = y_t.$$

Следовательно, последовательность  $\{y_t\}$  строго убывает, ограничена снизу нулем, а поэтому сходится к некоторому числу  $a \geq 0$ . Нам надо показать что  $a = 0$  (так как это равносильно сходимости  $x_t \rightarrow x^*$ ).

Последовательность  $x_t$  ограничена, поскольку

$$\begin{aligned} |x_t| &= |x_t - x^* + x^*| \leq |x_t - x^*| + |x^*| = \\ &= y_t + |x^*| < y_0 + |x^*| \end{aligned}$$

в силу строгого убывания  $\{y_t\}$ . По теореме Больцано-Вейерштрасса некоторая подпоследовательность последовательности  $\{x_t\}$  имеет предел. Обозначим этот предел через  $b$  и для простоты будем считать, что сама

последовательность  $\{x_t\}$  сходится к  $b$ . В действительности, если будет установлено, что  $a = 0$ , т. е.  $|x_t - x^*| \rightarrow 0$ , то сходящаяся к  $x^*$  будет сама последовательность  $\{x_t\}$ .

Если  $b \neq x^*$  (т. е., если  $a \neq 0$ ), то имеем

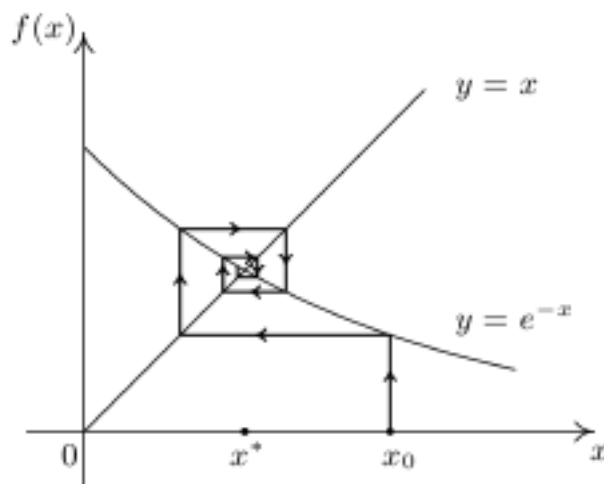
$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_t - x^*| = |b - x^*|,$$

(так как функция  $|x - x^*|$  непрерывна), и

$$\begin{aligned} a &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_{t+1} - x^*| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |f(x_t) - f(x^*)| = |f(b) - f(x^*)| < |b - x^*| = a, \end{aligned}$$

так как функция  $|f(x) - f(x^*)|$  непрерывна, и  $f$  есть простое сжатие. Последнее неравенство противоречиво. Значит,  $a = 0$  и  $x_t \rightarrow x^*$ .

**Пример 2.6.** Рассмотрим уравнение  $x_{t+1} = e^{-x_t}$ . Для него  $f(x) = e^{-x} > 0 \quad \forall x$ . Чтобы  $f$  было отображением “в себя”, возьмем в качестве фазового множества  $\mathbf{S} = R_+$ . Из геометрических соображений ясно, что  $f$  имеет одну точку равновесия  $x^* > 0$ , и диаграмма указывает на её глобальную устойчивость.



Посмотрим, что дает теорема 2.1.

Покажем, что  $f$  – простое сжатие на  $R_+$ . Действительно, для любых  $0 \leq x_1 \leq x_2$ , с помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях, имеем (т.к.  $f'(x) = -e^{-x}$ )

$$e^{-x_2} - e^{-x_1} = -e^{-c}(x_2 - x_1), \quad \text{где } c \in (x_1, x_2).$$

Отсюда, переходя к модулям и учитывая, что  $|e^{-c}| < 1$ , получаем условие простого сжатия:

$$|e^{-x_2} - e^{-x_1}| = |e^{-c}| \cdot |x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|.$$

Условия теоремы оказываются выполненными, и она подтверждает геометрический вывод о глобальной устойчивости  $x^*$   $\square$ .

Достоинство теоремы 2.1. состоит в том, что в ней фазовое множество произвольно (может быть неограниченным, открытым, замкнутым и т.д.). Но она требует априорного знания, что точка равновесия существует. Можно избавиться от этого недостатка, но для этого необходимо более сильное условие сжатия, которое дает

**Определение 2.4.** Отображение  $f : \mathbf{S} \rightarrow R$  назовем *сжимающим*, если существует такое число  $k \in (0, 1)$ , что

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{S}. \quad (2.43)$$

Число  $k$  называют *коэффициентом сжатия* отображения  $f$ .

Сравнение неравенств (2.42), (2.43) показывает, что сжимающее отображение является и просто сжимающим, но не наоборот. Для простого сжатия в роли коэффициента сжатия выступает отношение в левой части неравенства (2.40), но оно зависит от  $x_1, x_2$ . Для сжатия коэффициент  $k$  не зависит от выбора точек  $x_1, x_2$ , т.е. является равномерным.

Для приложений важно знать факт сжимаемости отображения, т.е. иметь критерий существования числа  $k$  со свойством (2.43). В случае гладких отображений удобным является следующий критерий.

2.8. Пусть  $f(x)$  – гладкая функция на числовой прямой, причем

$$|f'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2.44)$$

Тогда  $f$  – сжимающее отображение с коэффициентом  $k$  на  $R$  и на любом ее промежутке  $\mathbf{S}$ .

**Пояснение.** Одну и ту же функцию можно рассматривать на различных множествах  $\mathbf{S}$ , не обязательно совпадающих с областью её определения. Разным  $\mathbf{S}$  соответствуют разные отображения  $f : \mathbf{S} \rightarrow R$  (См. ниже пример 2.7.).

**Доказательство.** Возьмем любые  $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$  и применим к отрезку  $[x_1, x_2]$  теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad \text{где } c \in (x_1, x_2).$$

Отсюда, с учетом неравенства (2.44), получаем нужную оценку (2.43):

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \leq k|x_2 - x_1|, \quad \text{где } k \in (0, 1).$$

Так как это неравенство выполняется для любых  $x_1, x_2 \in R$ , то  $f$  – сжатие на  $R$  и любом подмножестве из  $R$ .

**Пример 2.7.** Функция  $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$  является сжатием на  $R$ , так как

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим функцию  $f(x) = \cos x$  на отрезке  $[0, b]$ . Если  $b < \pi/2$ , то

$$|f'(x)| = |\sin x| = \sin x \leq \sin b < 1,$$

и отображение  $f : [0, b] \rightarrow R$  есть сжатие с коэффициентом  $k = \sin b$ . Но если взять  $b = \pi/2$  и рассмотреть отображение  $f : [0, \pi/2] \rightarrow R$ , то оно уже не будет сжатием: теперь  $|f'(x)| = \sin x \leq 1$  на  $[0, \pi/2]$  и достаточное условие (2.43) не срабатывает. Сжатия на  $[0, \pi/2]$  действительно нет. (Покажите это.)

Вернемся теперь к динамике и устойчивости. Справедлива

**Теорема 2.2 (о существовании, единственности и глобальной устойчивости неподвижной точки).** Пусть  $f$  – сжимающее отображение замкнутого множества  $S$  в себя. Тогда:

- (а) существует единственная неподвижная точка  $x^* \in S$  отображения  $f$  на  $S$  (т.е.  $f(x^*) = x^*$ );
- (б) при любом  $x_0 \in S$  траектория уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$  сходится к  $x^*$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $x^*$  притягивает все траектории из  $S$ .

**Замечания:**

1) Здесь, как всегда, нужно, чтобы область значений отображения  $f$  попадала в фазовое множество  $S$  для корректного определения всех траекторий при  $x_0 \in S$ .

2) Обычно  $S$  – это прямая  $R$ , полупрямая  $R_+$ , или некоторый отрезок  $[a, b]$ .





**Пример 2.8.** Функция  $f(x) = \cos x$  отображает отрезок  $[0, 1]$  в себя и является сжатием (пример 2.7). Поэтому уравнение  $x_{t+1} = \cos x_t$  имеет на  $[0, 1]$  одну глобально устойчивую точку равновесия.

## 2.5.2. Критерий локальной устойчивости

Этот критерий получается, в сущности, локализацией следствия теоремы 2.2.

**Теорема 2.3.** Пусть  $f(x)$  – гладкая функция, отображающая промежуток  $\mathbf{S}$  в себя, и  $x^* \in \mathbf{S}$  – ее неподвижная точка. Тогда:

- (а) если  $|f'(x^*)| < 1$ , то  $x^*$  локально устойчива (является притягивающей точкой равновесия);
- (б) если  $|f'(x^*)| > 1$ , то  $x^*$  – неустойчива;
- (в) если  $|f'(x^*)| = 1$ , то  $x^*$  может быть как локально устойчивой, так и неустойчивой (т. е. этот случай требует дополнительного исследования).

**Доказательство.** В силу гладкости  $f(x)$  на  $\mathbf{S}$ , имеет место разложение

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)[f'(x^*) + \alpha(x)],$$

где

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in \mathbf{S}}} \alpha(x) = 0 \text{ и } \alpha(x^*) = 0. \quad (2.45)$$

Его и будем анализировать.

(а) Предположим, что  $|f'(x^*)| < 1$ . Выберем число  $k$ , удовлетворяющее неравенству  $|f'(x^*)| < k < 1$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = |f'(x^*) + \alpha(x)|$ . Она непрерывна в точке  $x^*$ , причем  $g(x^*) = |f'(x^*)| < k$ . В силу (2.45) это неравенство сохранится и для точек из  $\mathbf{S}$ , близких к  $x^*$ , т.е. можно указать такую  $\delta$ -окрестность точки  $x^*$ , что

$$g(x) = |f'(x^*) + \alpha(x)| < k \quad x \in \mathbf{S} \cap (x^* - \delta, x^* + \delta).$$

Возьмем теперь любое  $\epsilon > 0$  и положим  $\delta^* = \min\{\epsilon, \delta\}$ ,  $I = \mathbf{S} \cap (x^* - \delta, x^* + \delta)$ . Тогда на промежутке  $I$   $g(x) < k$  и

$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| = |x - x^*|g(x) \leq k|x - x^*| < \delta^*. \quad (2.46)$$

Отсюда, в частности, следует, что  $f$  отображает  $I$  в себя.

Нам достаточно показать, что для любой точки  $x_0 \in I$  начинающаяся в ней траектория  $\{x_t\}$  уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$  сходится к  $x^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Используя неравенство (2.46), последовательно получаем оценки:

$$\begin{aligned} |x_1 - x^*| &= |f(x_0) - f(x^*)| \leq k|x_0 - x^*|, \\ |x_2 - x^*| &= |f(x_1) - f(x^*)| \leq k|x_1 - x^*| \leq k^2|x_0 - x^*|, \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+1} - x^*| &= |f(x_n) - f(x^*)| \leq k|x_n - x^*| \leq k^{n+1}|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве правая часть сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $k \in (0, 1)$  и, следовательно,  $|x_{n+1} - x^*| \rightarrow 0$ . Но это равносильно сходимости  $\{x_t\}$  к  $x^*$  при  $t \rightarrow \infty$ . Утверждение (а) доказано.

(б) Пусть теперь  $|f'(x^*)| > 1$ . Возьмём любое число  $q$  такое, что  $1 < q < |f'(x^*)|$ . В силу тех же соображений непрерывности, что и при доказательстве утверждения (а), можно найти такое  $\delta > 0$ , что неравенство

$$g(x) = |f'(x^*) + \alpha(x)| > q$$

выполняется для всех  $x$  из промежутка  $\mathbf{S} \cap (x^* - \delta, x^* + \delta)$ . Вновь возьмём любое  $\epsilon > 0$ , положим  $\delta^* = \min\{\epsilon, \delta\}$ ,  $I = \mathbf{S} \cap (x^* - \delta^*, x^* + \delta^*)$  и рассмотрим траекторию, стартующую из произвольной точки  $x_0 \in I, x_0 \neq x^*$ . Для неё

$$\begin{aligned} |x_1 - x^*| &= |f(x_0) - f(x^*)| = |x_0 - x^*|g(x) \geq q|x_0 - x^*|, \\ |x_2 - x^*| &= |f(x_1) - f(x^*)| = |x_1 - x^*|g(x) \geq q^2|x_0 - x^*|, \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+1} - x^*| &= |f(x_n) - f(x^*)| = |x_n - x^*|g(x) \geq q^{n+1}|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Но  $q^n \rightarrow +\infty$ , так как  $q > 1$ , и, следовательно,  $|x_{n+1} - x^*| \rightarrow +\infty$ . Это означает, что любая траектория, стартующая из  $x_0 \in I, x_0 \neq x^*$ , неограниченно удаляется от точки  $x^*$ , а потому она неустойчива.

(в) Тот факт, что при  $|f'(x^*)| = 1$  возможны все случаи, демонстрирует

**Пример 2.9.** Нелинейное разностное уравнение

$$x_{t+1} = x_t + ax_t^3$$



Теорема 2.3 полностью доказана.

**Пример 2.10.** Исследуем на локальную устойчивость нелинейное уравнение

$$x_{t+1} = 2x_t^3 / (1 + x_t^2).$$

Здесь функция

$$f(x) = 2x^3 / (1 + x^2)$$

определена и является гладкой на всей числовой прямой  $R$ , причем

$$f'(x) = 2x^2(x^2 + 3)(1 + x^2)^{-2}.$$

Решив уравнение  $f(x) = x$ , найдём три точки равновесия:  $x^* = 0$ ,  $\bar{x} = 1$ ,  $x^e = -1$ . Применим теорему 2.3:  $f'(0) = 0 < 1 \Rightarrow x^* = 0$  локально асимптотически устойчива;  $f'(1) = f'(-1) = 2 > 1 \Rightarrow \bar{x} = 1$  и  $x^e = -1$  неустойчивы.  $\square$

Следующая интерпретация теоремы 2.3 полезна и допускает далеко идущие обобщения.

При гладкой функции  $f(x)$  справедливо равенство, вытекающее из определения неподвижной точки и теоремы Лагранжа:

$$x_{t+1} - x^* = f(x_t) - f(x^*) = f'(c_t)(x_t - x^*), \quad (2.48)$$

где точка  $c_t$  лежит между  $x_t$  и  $x^*$ . Если рассмотреть траектории, стартующие вблизи  $x^*$ , т.е. при достаточно малых  $|x_0 - x^*|$ , то, в силу непрерывности функции  $f(x)$ , отклонения  $|x_t - x^*|$  будут тоже малы. Это свойство называется *непрерывной зависимостью решения от начальной точки*. (Заметим, что оно не гарантирует устойчивости!) Поэтому  $f'(c_t)$  будет мало отличаться от  $f'(x^*)$ . Положим

$$y_t = x_t - x^*, \quad a = f'(c_t). \quad (2.49)$$

В силу сказанного и равенства (2.48), можно ожидать, что  $y_t$  будет приближённо удовлетворять линейному разностному уравнению

$$y_{t+1} = ay_t. \quad (2.50)$$

Оно получено линеаризацией исходного уравнения в окрестности точки равновесия  $x^*$  (см. (2.49)) и часто называется уравнением линейного приближения.

Точке равновесия  $x^*$  в исходном уравнении соответствует точка равновесия  $y^* = 0$  в линеаризованном уравнении (2.50). Если вспомнить, что при  $|a| < 1$  она глобально устойчива, а при  $|a| > 1$  – неустойчива (см. п.2.2), то теорему 2.3 можно переформулировать следующим образом:

**2.9. Теорема о линеаризации.** Пусть  $x^*$  – точка равновесия нелинейного уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$  с гладкой функцией  $f(x)$ , а  $y^* = 0$  – точка равновесия в соответствующем линеаризованном уравнении (2.50). Тогда:

(а) из асимптотической устойчивости  $y^*$  следует асимптотическая устойчивость  $x^*$ ;

(б) из неустойчивости  $y^*$  следует неустойчивость  $x^*$ .

### 2.5.3. Обсуждение

Полезно подвести предварительные итоги нашего знакомства с нелинейными динамическими системами и оценить результаты данного параграфа. Эта оценка включает в себя позитивные и критические моменты.

К безусловно позитивным можно отнести следующие:

- во-первых, мы научились исследовать локальную и глобальную устойчивость точек равновесия достаточно элементарными методами; вместе с фазовой диаграммой они составляют полезный инструмент качественного анализа;

- во-вторых (и это даже более важно), на пути к критериям устойчивости мы познакомились с такими важными для математики понятиями, как отображения, их неподвижные точки, сжимающие отображения и т.д.

Здесь особенно хочется оттенить то обстоятельство, что эти понятия, равно как и основные результаты (теоремы 2.2, 2.3 вместе с утверждением 2.9), распространяются на многомерные системы с естественными изменениями, касающимися только обозначений. Примечательно, что то же относится и к доказательствам. Более того, утверждение а) теоремы 2.2 вообще является одним из фундаментальных результатов математики и носит название *принципа сжимающих отображений*, или *теоремы о неподвижной точке*.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Теорема 2.2 остаётся верной, если считать в ней множество  $S$  полным метрическим пространством (с расстоянием  $d(x, y)$  между точками  $x, y \in S$ , удовлетворяющим свойствам, вполне анало-

Критическая оценка диктуется следующими фактами.

- во-первых, как уже отмечалось, глобальная устойчивость равновесия в нелинейных моделях – довольно редкое явление вообще и в экономических моделях в частности.

- во-вторых, информации о локальной устойчивости или неустойчивости точек равновесия недостаточно, чтобы делать заключение о поведении траекторий модели *в целом*: такие сложные явления, как бифуркация и тем более хаотическая динамика, не вскрываются и не анализируются методами данного параграфа. Между тем, именно эти явления являются объектом пристального внимания и осмысления в современной экономической динамике.

Таким образом, можно сказать, что, используя изложенные методы, можно исследовать относительно простые модели, или выявлять множества фазовых состояний и параметров сложных моделей, в диапазоне которых не наблюдается иррегулярного поведения траекторий.

Примеры последующих параграфов данной главы должны позволить читателю яснее понять эту мысль.

## Обзор основных понятий и результатов

- *Разностное уравнение 1-го порядка*  $x_{t+1} = f(t, x_t)$  полностью задаётся функцией  $f(t, x)$ , определённой при  $t \in Z_+ = 0, 1, \dots, x \in \mathbf{S} \subseteq R$ , со значениями в  $\mathbf{S}$ . Такую функцию называют *отображением* из множества  $Z_+ \times \mathbf{S}$  в  $\mathbf{S}$  и пишут  $f : Z_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ . Множество  $\mathbf{S}$  называют фазовым.

- *Решением*, или *траекторией* разностного уравнения  $x_{t+1} = f(t, x_t)$  называется любая последовательность  $x_t$ , удовлетворяющая данному рекуррентному равенству при  $t = 0, 1, \dots$ .

- *Траектория, начинающаяся из начальной точки*  $x_0 \in \mathbf{S}$  (сартующая из  $x_0$ ), определяется условием  $x|_{t=0} = x_0$ .

- *Автономное разностное уравнение*  $x_{t+1} = f(x_t)$  задаётся отображением  $f(x)$  множества  $\mathbf{S}$  в себя, т.е.  $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ .

---

гичным норме векторов, и дополнительным условием сходимости каждой фундаментальной последовательности)

---

• Точка равновесия автономного уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$ , или неподвижная точка отображения  $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$  – это постоянное решение  $x_t \equiv x^* \in \mathbf{S}$ , или что то же, – корень уравнения  $f(x) = x$  (и, следовательно,  $f(x^*) = x^*$ ).

• Множество притяжения точки равновесия  $x^*$  обозначается  $S(x^*)$ , и состоит из точек  $x_0 \in \mathbf{S}$ , стартуя из которых, траектории сходятся к  $x^*$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

•  $x^*$  глобально устойчива, если  $S(x^*) = \mathbf{S}$ , т.е.  $x^*$  притягивает к себе все траектории из  $\mathbf{S}$ .

•  $x^*$  локально устойчива, если множество притяжения  $S(x^*)$  есть пересечение некоторой окрестности точки  $x^*$  с множеством  $\mathbf{S}$ , т.е.  $x^*$  притягивает к себе траектории, начинающиеся в  $\mathbf{S}$  вблизи  $x^*$ .

---

•  $x^*$  устойчива, если в её произвольно малой окрестности остаются все траектории, начинающиеся в  $\mathbf{S}$  достаточно близко к  $x^*$  (т.е.  $x^*$  удерживает вблизи себя траектории близких к ней точек).

•  $x^*$  неустойчива, если все траектории близких к ней точек покидают любую окрестность  $x^*$  (т.е.  $x^*$  отталкивает траектории всех близких к ней точек).

•  $x^*$  асимптотически устойчива, если она устойчива и притягивает к себе траектории близких к ней точек.

• Понятия локальной устойчивости и асимптотической устойчивости совпадают.

---

• Отображение  $f$  множества  $\mathbf{S}$  в себя называют просто сжимающим на  $\mathbf{S}$ , если

$$|f(y) - f(x)| < |y - x| \quad \forall x, y \in \mathbf{S}, x \neq y.$$

• Если  $f(x)$  – гладкая функция на числовом промежутке  $\mathbf{S}$  и  $|f'(x)| < 1$  на  $\mathbf{S}$ , то  $f$  – просто сжимающее отображение на  $\mathbf{S}$ .



• Просто сжимающее отображение  $f$  промежутка  $\mathbf{S}$  в себя может иметь только одну неподвижную точку  $x^* \in \mathbf{S}$ . Если она существует, то является глобально устойчивой точкой равновесия уравнения  $x_{t+1} = f(x_t)$  на  $\mathbf{S}$ .

• Отображение  $f$  множества  $\mathbf{S}$  в себя называется *сжимающим*, если найдётся число  $k \in (0, 1)$ , что выполняется неравенство

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \quad \forall x, y \in \mathbf{S}.$$

• Сжимающее отображение замкнутого множества  $\mathbf{S}$  в себя имеет единственную неподвижную точку, которая глобально устойчива.

• Пусть  $f$  – гладкое отображение промежутка  $\mathbf{S}$  в себя и  $x^*$  – его неподвижная точка. Тогда:

а) если  $|f'(x^*)| < 1$ , то  $x^*$  локально устойчива;

б) если  $|f'(x^*)| > 1$ , то  $x^*$  неустойчива;

в) если  $|f'(x^*)| = 1$ , то  $x^*$  может быть как локально устойчивой, так и неустойчивой.

## Задачи

**2.33.** Исследовать поведение решений уравнения  $x_{t+1} = 1/x_t$ .

**2.34.** Показать, что при  $|a| < 1$  отображение  $f(x) = a \ln(1 + x^2)$  является сжимающим на  $\mathbf{R}$ . Как ведут себя решения уравнения  $x_{n+1} = f(x_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

**2.35.** Построить фазовую диаграмму разностного уравнения из примера 2.10.

**2.36.** Исследовать качественно уравнение  $x_{t+1} = ax_t^\alpha + bx_t$  на  $S = \mathbf{R}_+$  при параметрах  $a > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1$ .

**2.37.** Исследовать на устойчивость точки равновесия уравнения

$$x_{n+1} = x_n / [\alpha + (1 - \alpha)x_n]$$

на  $\mathbf{R}_+$  при  $\alpha \in (0, 1)$ .

*Указание.* Используйте замену  $y_n = 1/x_n$ .

**2.38.** Найти общее решение линейного уравнения  $x_{t+1} = ax_t + ta^t$  и исследовать сходимость траектории при  $t \rightarrow +\infty$ .

*Указание.* Использовать утверждения 2.4, 2.6.

**2.39.** а) Найти решение уравнения  $x_{t+1} = ax_t + cy_t + d$ , где  $\{y_t\}$  – общее решение уравнения  $y_t = ay_t + b$  и  $a \neq 0, a \neq 1$ .

б) Исследовать сходимость решения, полученного в а).

**2.40.** Доказать, что непрерывное отображение  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  имеет неподвижную точку на  $[a, b]$ .

*Указание.* Рассмотреть  $g(x) = x - f(x)$ .

**2.41.** Метод Ньютона для поиска корня уравнения  $f(x) = 0$  состоит в следующем: берётся начальное приближение  $x_0$  и следующие приближения к искомому корню  $a$  строятся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказать, что если  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема и  $f'(a) \neq 0$ , то найдётся такой интервал  $I$ , содержащий точку  $a$ , что при  $x_0 \in I$  последовательные приближения метода Ньютона сходятся к  $a$ .

*Указание.* Применить теорему 2.3 к функции  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ .

**2.42.** Доказать следующее утверждение, дополняющее сомнительный случай (b) в теореме 2.3:

Пусть  $f(x)$  трижды гладкая функция на промежутке  $S$  и  $x^*$  – её неподвижная точка со свойством  $f'(x^*) = 1$ . Тогда:

(а) если  $f''(x^*) \neq 0$ , то  $x^*$  неустойчива;

(б) если  $f''(x^*) = 0$ , а  $f'''(x^*) > 0$ , то  $x^*$  неустойчива;

(в) если  $f''(x^*) = 0$ , а  $f'''(x^*) < 0$ , то  $x^*$  локально асимптотически устойчива.

*Указание.* (для случая (а)). Если  $f''(x^*) = 0$ , то  $f(x)$  выпукла в некоторой окрестности  $x^*$  в  $\mathbf{S}$  при  $f''(x^*) > 0$  и вогнута при  $f''(x^*) < 0$ . При  $f''(x^*) > 0$  производная  $f'(x)$  возрастает вблизи  $x^*$  и, следовательно,  $f'(x) > 1$  на пересечении  $\mathbf{S}$  с достаточно малым интервалом  $I = (x^*, x^* + \delta)$  и можно выбрать такое число  $q$ , что  $1 < q < f'(x)$  на этом пересечении. Далее надо использовать те же аргументы, что и при доказательстве случая (б) теоремы 2.3.

## 2.6. Приложение к нелинейным экономическим моделям

### 2.6.1. Исследование неоклассической модели роста Солоу

Напомним (см. п.1.3, пример 1.9), что данная модель описывается следующими уравнениями:

- в каждом периоде времени национальный доход (или продукт) описывается двухфакторной производственной функцией  $Y_t = F(K_t, L_t)$ ;
- трудовые ресурсы возрастают с экзогенно заданным темпом роста  $(1+n)$ , т.е.  $L_{t+1} = (1+n)L_t$  или  $L_t = (1+n)^t L_0$ ;
- прирост капитала (основных фондов) описывается разностным уравнением

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - bK_t,$$

где  $s \in (0, 1)$  – предельная склонность к инвестициям (норма сбережения), а  $b$  – норма амортизации.

В предположении, что функция  $F(K, L)$  положительно однородна (т.е.  $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \forall \lambda \geq 0$ ), из этих соотношений нетрудно получить уравнение динамики для показателя удельной капиталовооруженности  $k_t = K_t/L_t$ :

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sF(K_t, L_t) + (1-b)K_t}{(1+n)L_t} = \frac{s}{1+n} f(k_t) + \frac{1-b}{1+n} k_t,$$

где  $f(k) = F(k, 1)$ , поскольку

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = F(k, 1).$$

Т.о., основное динамическое уравнение модели имеет вид

$$k_{t+1} = g(k_t), \quad \text{где } g(k) = \frac{s}{1+n} f(k) + \frac{1-b}{1+n} k. \quad (2.51)$$

(1) *Типичные качественные свойства* данной модели можно получить, исследуя частный случай производственной функции Кобба-Дугласа

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad A > 0, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.52)$$

В этом случае

$$f(k) = Ak^\alpha$$

и фазовая диаграмма уравнения (2.51) выглядит так, как показано на рис. 2.6. Пересечение графика строго возрастающей, вогнутой функции  $g(k)$  с биссектрисой  $z = k$  дает две точки равновесия  $k = 0$  и  $k^* > 0$ , из которых вторая асимптотически устойчива и притягивает к себе все траектории, начинающиеся при  $k_0 > 0$ .

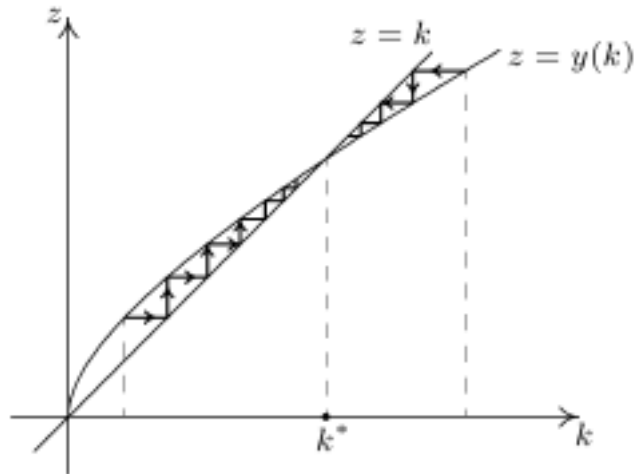


Рис. 2.6. Фазовая диаграмма неоклассической модели (2.51) в типичном случае.

Применим теперь аналитические методы. Поскольку  $g$  отображает  $R_\pm$  в  $R_+$ , то возьмем в качестве фазового множества  $\mathbf{S}$  полупрямую  $R_+$ . Уравнение для поиска неподвижных точек  $g(k) = k$  сводится к следующему

$$k(Ask^{\alpha-1} - b - n) = 0.$$

Отсюда находим положительную точку равновесия:

$$k^* = \left( \frac{As}{b+n} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (2.53)$$

Применим к ней критерий локальной устойчивости теоремы 2.3. Нетрудно подсчитать, что

$$g'(k^*) = (1 - \alpha) \frac{b+n}{1+n} \in (0, 1),$$

поскольку  $\alpha \in (0, 1)$  и "нормальные" значения коэффициента амортизации  $b \in (0, 1)$ . Следовательно, теорема 2.3 указывает на локальную асимптотическую устойчивость  $k^*$ .

Наличие в  $\mathbf{S}$  второй точки равновесия не позволяет применить критерий глобальной устойчивости. (Кроме того,  $g'(0+) = +\infty$  так что на сжатие рассчитывать не приходится даже при некотором сужении  $\mathbf{S}$  до полупрямой вида  $k \geq \varepsilon, \varepsilon > 0$ .) Однако установить, что  $k^*$  притягивает все траектории с  $k_0 > 0$  можно непосредственно, используя свойства монотонности. Действительно, если  $0 < k_0 < k^*$ , то на соответствующей траектории  $k_{t+1} = g(k_t) > k_t$ , поскольку  $g(k) > k$  при  $k \in (0, k^*)$ . При этом

$$k_{t+1} = g(k_t) < g(k^*) = k^*$$

в силу возрастания  $g(k)$  и неподвижности точки  $k^*$ . Поэтому последовательность  $\{k_t\}$  возрастает и ограничена сверху числом  $k^*$ . Отсюда следует ее сходимости, которая возможна только к точке  $k^*$  (см. утверждение 2.2 в п. 2.1). Аналогично устанавливается притяжение к  $k^*$  всех траекторий с  $k_0 > k^*$ .

Анализ основного уравнения модели позволяет сделать выводы о поведении траекторий исходных макропеременных  $K, Y, I = sY, C = (1 - s)Y$ . Действительно, при  $K_0 > 0$  имеем  $k_0 > 0$  и, следовательно, при достаточно больших  $t$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} K_t &= k_t L_t \approx k^*(1+n)^t L_0, \\ Y_t &= y_t L_t = A k_t^\alpha L_t \approx A (k^*)^\alpha (1+n)^t L_0, \\ I_t &= i_t L_t = s y_t L_t \approx s A (k^*)^\alpha (1+n)^t L_0, \\ C_t &= (1-s) y_t L_t \approx (1-s) A (k^*)^\alpha (1+n)^t L_0. \end{aligned}$$

Мы видим, что траектории всех исходных макропеременных возрастают, причем их темп роста в долговременной перспективе практически совпадает с темпом роста трудовых ресурсов. В этом случае говорят, что развитие экономики имеет тенденцию выхода на *режим сбалансированного роста*, в котором все макропеременные растут с одним темпом. Ясно, что при  $K_0 = k^* L_0$  экономика будет эволюционировать непосредственно в режиме сбалансированного роста, так как в этом случае  $k_t \equiv k^*$ .

(2) *Оптимизация режима сбалансированного роста.* Поскольку все траектории модели сходятся к режиму сбалансированного роста при лю-

бой постоянной доле инвестиций  $s \in (0, 1)$ , то можно поставить вопрос о выборе наиболее предпочтительного сбалансированного роста.

Заметим, что равновесный уровень удельной капиталовооруженности  $k^*$  зависит от  $s$  как от параметра:  $k^* = k^*(s)$  (см. (2.53)). Поэтому вопрос можно уточнить и поставить следующим образом: какая норма сбережения предпочтительней?

Для ответа на него необходимо выбрать критерий предпочтения. Одним из таких критериев является уровень потребления  $c$ , приходящийся на одного работающего: чем он выше, тем лучше режим сбалансированного роста. Поскольку  $c = (1 - s)f(k)$  и нас интересует максимум этого показателя в состоянии равновесия, т.е. при  $k^* = k^*(s)$ , то мы приходим к следующей задаче:

максимизировать функцию

$$\varphi(s) = (1 - s)f(k^*(s)) \quad \text{по } s \in (0, 1), \quad (2.54)$$

где  $k^*(s)$  – точка равновесия уравнения (2.51) при данном  $s$ .

Если учесть равенства (2.52), (2.53), то эта задача конкретизируется к следующей:

$$\varphi(s) = (1 - s)s^{1/(1-\alpha)} \rightarrow \max_{s \in (0,1)}.$$

Решение этой задачи действительно существует (объясните, почему?) и достигается в критической точке  $s^* = \alpha$ .

Таким образом, оптимальная доля инвестиций в задаче (2.54) совпадает с эластичностью производственной функции по капиталу, а соответствующая оптимальная доля потребления составит  $1 - s^* = 1 - \alpha$ ; она равна эластичности выпуска по труду. Такое распределение национального дохода носит название *золотого правила накопления*; ему соответствуют уровни равновесной капиталовооруженности

$$k^{**} = k^*(s^*) = \left( \frac{A\alpha}{b+n} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

и среднедушевого потребления

$$c^* = (1 - s^*)f(k^{**}).$$

Как показывают эмпирические исследования по применению неоклассической модели к экономике конкретных стран, параметр  $\alpha$  колеблется в

пределах от 0,4 до 0,6. Отвечающие ему значения оптимальной нормы потребления (в пределах от 40 до 60 % национального дохода) считаются заниженными в сравнении с фактически наблюдаемыми значениями. Например, в развитых странах норма непродовольственного потребления ниже 85 % встречается крайне редко и считается низкой.

**(3)** Обобщение полученных результатов на случай других производственных функций возможно при некоторых предположениях. Мы сделаем их применительно к "нормированной" функции  $f(k)$ . Во-первых, как обычно для неоклассической школы в экономике, будем предполагать  $f(k)$  строго возрастающей и вогнутой при  $k \geq 0$ . Во-вторых, чтобы гарантировать существование положительной точки равновесия  $k^*$ , нужно потребовать выполнения двух условий (см. рис. 2.6):

- а) неравенства  $g(k) > k$  при небольших  $k > 0$ ;
- б) противоположного неравенства при достаточно больших  $k$ .

Условие а) будет выполнено, если

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{g(k)}{k} > 1,$$

или, что то же самое, в силу равенства (2.51),

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{f(k)}{k} > \frac{b+n}{s}. \quad (2.55)$$

При гладкой при  $k > 0$  функции  $f(k)$  это неравенство можно выразить через производную, применив правило Лопиталя:

$$f'(0+) > \frac{b+n}{s} \quad (2.55')$$

( $f$  должна возрастать достаточно быстро в правой полукрестности нуля).

Условие б) будет выполнено, если график функции  $z = f(k)$  имеет горизонтальную асимптоту при  $k \rightarrow +\infty$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{g(k)}{k} = 0. \quad (2.56)$$

Действительно, в этом случае будет

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{g(k)}{k} = \frac{1-b}{1+n} > 1,$$

а это означает, что при достаточно больших  $k$  будет выполняться неравенство  $g(k) < k$ , так что графики функций  $z = f(k)$  и  $z = k$  пересекутся в единственной точке при некотором равновесном значении  $k^* > 0$ . Для гладкой  $f$  условие (2.56) сводится к соотношению

$$\lim_{k \rightarrow 0+} f'(k) = 0. \quad (2.56')$$

При выполнении предельных условий (2.55), (2.56) точка равновесия  $k^*$  будет притягивать к себе все траектории с  $k_0 > 0$  (см. рис. 2.6) и, следовательно, вывод о сходимости всех таких траекторий к режиму сбалансированного роста сохранится.

Отметим, что для функции Кобба – Дугласа (2.52) неравенство (2.55) выполнено, ибо в этом случае  $f'(0+) = +\infty$ , но равенство (2.56') не выполняется, а точка равновесия  $k^* > 0$  тем не менее имеется.

(4) Полезно рассмотреть также случай *производственной функции с постоянной эластичностью замещения* (функции CES), которую можно записать в виде

$$Y = F(K, L) = \bar{Y} \left[ \alpha \left( \frac{K}{\bar{K}} \right)^{-\gamma} + (1 - \alpha) \left( \frac{L}{\bar{L}} \right)^{-\gamma} \right]^{-1/\gamma}, \quad (2.57)$$

где  $\bar{Y}, \bar{K}, \bar{L}$  – положительные параметры (причем  $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$ ),  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma > 0$  – тоже параметры. Эта функция удовлетворяет стандартным неоклассическим условиям монотонности по факторам и вогнутости, но имеет более реалистичные свойства, чем функция Кобба – Дугласа. Например, для последней любой объем выпуска можно обеспечить при сколь угодно малом количестве одного из ресурсов, лишь бы второй был в достаточном количестве. Это свойство неоправданно высокой способности замещения одного ресурса другим не соответствует действительности. По меткому выражению выдающегося ученого Н.Н. Моисеева "современный мир – не Древний Египет, и современный сверхзвуковой самолет не может быть построен, подобно пирамиде Хеопса, руками 100 000 неквалифицированных рабов". Для функции CES эластичность замещения ресурсов равна  $1/(1 + \gamma) < 1$ , а не единице, как в случае функции Кобба-Дугласа.



Напомним, кстати, что при  $\gamma \rightarrow 0$  функция *CES* приближается к функции Кобба-Дугласа, а при  $\gamma \rightarrow +\infty$  сходится к функции Леонтьева

$$Y = F_\infty(K, L) = \bar{Y} \min \left\{ \left( \frac{K}{\bar{K}} \right), \left( \frac{L}{\bar{L}} \right) \right\}$$

с постоянными пропорциями затрат и нулевой эластичностью замещения. Поэтому функция *CES* занимает промежуточное место между двумя полярными (по свойствам замещения ресурсов) классами производственных функций, что делает ее весьма привлекательной.

Для функции *CES* удельный выпуск описывается функцией

$$f(k) = \bar{y} \left[ \alpha \left( \frac{k}{\bar{k}} \right)^{-\gamma} + 1 - \alpha \right]^{-1/\gamma},$$

где  $\bar{y} = \bar{Y}/\bar{L}$ ,  $\bar{k} = \bar{K}/\bar{L}$  (проверьте). Нетрудно убедиться, что

$$f'(0+) = \alpha^{-1/\gamma} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$$

и условие (2.55') выполнится лишь при норме сбережения, удовлетворяющей неравенству

$$s > \alpha^{1/\gamma} \cdot \frac{\bar{k}}{\bar{y}} (b + n). \quad (2.58)$$

Что же касается условия (2.56), то оно выполняется при всех допустимых значениях параметров функции (2.57) (проверьте).

Итак, при выполнении неравенства (2.58) в модели роста с функцией *CES* все траектории стремятся к режиму сбалансированного роста.

### 2.6.2. Макромодель накопления капитала с акселератором

В этой модели темп прироста национального продукта линейно связан с темпом прироста капитала:

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = a + b \left( \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} \right) \quad (2.59)$$

$$a > 0, \quad 0 < b < 1.$$

Прирост капитала обусловлен инвестициями, которые пропорциональны выпуску:  $I_t = sY_t$ ,  $s > 0$ . Это соотношение можно трактовать как акселератор простейшего вида, при котором динамика капитала описывается следующим уравнением:

$$K_{t+1} - K_t = sY_t \quad (2.60)$$

(амортизацией капитала пренебрегаем).

Подстановка (2.60) в (2.59) после преобразований дает нелинейное уравнение:

$$Y_{t+1} = (1 + a)Y_t + bs\frac{Y_t^2}{K_t}. \quad (2.61)$$

Из (2.59) и (2.60) легко следует, что при любых начальных условиях  $Y_0 > 0$ ,  $K_0 > 0$  траектории  $Y_t$ ,  $K_t$  положительны. Более того из (2.61) вытекает, что  $Y_{t+1} > (1 + a)Y_t$  и, следовательно,  $Y_t > (1 + a)^t Y_0$ . Поэтому  $Y_t \rightarrow +\infty$ , а так как  $K_{t+1} > sY_t$  то и  $K_t \rightarrow +\infty$ .

Мы проанализируем динамику показателя капиталотдачи  $x_t = Y_t/K_t$ . Для этого получим сначала соответствующее уравнение. Имеем:

$$x_{t+1} = \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} = \frac{1}{K_t + sY_t} [(1 + a)Y_t + bsY_t x_t],$$

откуда, путем деления числителя и знаменателя справа на  $K_t$ , приходим к нелинейному уравнению

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad \text{где } f(x) = \frac{(1 + a)x + bsx^2}{1 + sx}. \quad (2.62)$$

Функция  $f$  отображает полуось  $R_+$  в себя, и, как легко проверить, имеет две неподвижные точки  $\bar{x} = 0$  и  $x^* = a/(1 - b)s > 0$ . Найдем производную от  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1 + a + 2sbx + s^2bx^2}{(1 + sx)^2}. \quad (2.63)$$

Отсюда получаем, что  $f'(\bar{x}) = f'(0) = 1 + a > 1$  и по теореме 2.3 точка  $\bar{x} = 0$  неустойчива. В то же время

$$f'(x^*) = \frac{1 + a - 2b + b^2 + a^2b - ab^2}{(1 + a - b)^2} = \frac{1 - b + ab}{1 - b + a}.$$

По предположению  $a > 0$ ,  $b \in (0; 1)$ . По Теореме 2.3 точка равновесия  $x^*$  локально устойчива.

Покажем, что в действительности множество притяжения точки  $x^*$  совпадает с полупрямой  $x > 0$ .

Из (2.63) видно, что  $f'(x) > 0$  при  $x \geq 0$  и, следовательно,  $f(x)$  строго возрастает. Поэтому

$$f(x) < f(x^*) = x^* \quad \text{при } x \in (0, x^*),$$

$$f(x) > f(x^*) = x^* \quad \text{при } x > x^*.$$

Из этих неравенств путем итераций выводим, что

$$\text{при } x_0 < x^*, \quad x_t < x^* \quad \forall t > 0,$$

$$\text{при } x_0 > x^*, \quad x_t > x^* \quad \forall t > 0.$$

Далее, уравнение (2.62) можно преобразовать к следующему виду:

$$x_{t+1} - x_t = \frac{1}{1 + sx_t} [a - s(1 - b)x_t] x_t.$$

Его правая часть меньше нуля при  $x_t < x^*$  и больше нуля при  $x_t > x^*$ . Поэтому все траектории с  $x_0 < x^*$  монотонно возрастают и ограничены сверху числом  $x^*$ , а все траектории с  $x_0 > x^*$  монотонно убывают и ограничены снизу числом  $x^*$ . Но тогда все эти траектории сходятся при  $t \rightarrow +\infty$ , причем сходимость может быть только к неподвижной точке  $x^*$ .

Итак,  $S(x^*) = (0, +\infty)$  и можно сказать, что  $x^*$  глобально устойчива на этом интервале.

Для исходной модели (2.58), (2.60) это означает, что при любых  $Y_0 > 0$ ,  $K_0 > 0$  показатель капиталотдачи  $Y_t/K_t$  монотонно сходится к  $x^*$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

### 2.6.3. Модели делового цикла

Статистические данные свидетельствуют, что темпы экономического роста меняются во времени и имеют тенденцию к периодическим спадам и подъемам. Выдающийся русский экономист Н.Д. Кондратьев открыл

долгосрочные циклы или, иначе, длинные волны и положил начало одному из направлений современной макроэкономики – анализу экономических (деловых) циклов. В настоящее время распространена гипотеза существования системы взаимосвязанных циклов – краткосрочных (40 месяцев), среднесрочных (7 – 11 лет) и долгосрочных циклов Кондратьева (45 – 60 лет).

Наиболее известной и ранней кейнсианской моделью краткосрочных циклов является модель Самуэльсона – Хикса, основанная на использовании принципа акселератора (см. п.1.3, пример 1.13). Главный вывод этой модели состоит в том, что единственной причиной неравномерного развития экономики (колебания национального дохода) являются колебания спроса. Однако он часто подвергается сомнению.

Мы рассмотрим здесь другие модели делового цикла, которые приводят к колебательным решениям, но не используют принципа акселерации и обобщают так называемую модель мультипликатора Кейнса.

Для этого обсудим формализацию ключевой гипотезы макроэкономической модели Кейнса "спрос создает предложение". Общепринятой является моделирование этой гипотезы уравнением, т.е. величина предложения национального дохода в каждый последующий период времени должна равняться величине спроса предыдущего периода. Но это слишком прямолинейная и "жесткая" трактовка обсуждаемой гипотезы, которая определяет лишь направление изменения национального дохода. Более последовательной и общей является "мягкая" модель этой гипотезы, в которой прирост национального дохода не равен избыточному спросу, а лишь пропорционален ему. Сказанное формализуется уравнением

$$Y_{t+1}^S - Y_t^S = \alpha (Y_t^D - Y_t^S) , \quad (2.64)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр, характеризующий реакцию экономики на дисбаланс между спросом и предложением. Заметим, что при  $\alpha = 1$  из (2.64) получается "жесткая" модель.

Пусть теперь текущее потребление линейно связано с предложением, т.е.  $C_t = C_0 + cY_t^S$ , а инвестиции складываются из автономных  $I_0$  и постоянного прироста спроса на инвестиции, т.е.  $I_t = I_0 + \Delta I$ . Тогда величина спроса

$$Y_t^D = C_t + I_t = C_0 + cY_t^S + I_0 + \Delta I$$

и подстановка этого выражения в (2.64) приводит к линейному уравнению

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S + \alpha [(c - 1)Y_t^S + C_0 + \Delta I] . \quad (2.65)$$

Это уравнение имеет точку равновесия

$$Y^* = \frac{\Delta I + I_0 + C_0}{1 - c}$$

и для переменной  $y_t = Y_t^S - Y^*$  получается следующее однородное уравнение

$$y_{t+1} = ay_t, \quad \text{где } a = 1 - \alpha(c - 1).$$

Точка равновесия  $y^* = 0$  этого уравнения глобально устойчива при  $|a| < 1$ , т.е. при

$$0 < \alpha(1 - c) < 2 \quad \text{или} \quad \alpha < 2/(1 - c),$$

так как  $\alpha > 0$ . В случае  $\alpha = 1$ , который соответствует традиционной модели мультипликатора, это неравенство выполнится, поскольку  $c \in (0, 1)$ .

Итак, при небольших значениях  $\alpha$  национальный доход сходится к своему равновесному значению. Эта сходимости монотонна при  $0 < \alpha < 1/(1 - c)$ , и носит колебательный характер с убывающей амплитудой при  $1/(1 - c) < \alpha < 2/(1 - c)$ . В целом динамика системы (2.65) определяется коэффициентом реакции  $\alpha$  и предельной склонностью к потреблению  $c$ .

Описанное обобщение модели мультипликатора привело к линейной модели. Еще более интересное обобщение, приводящее к нелинейной модели, возникает, если заметить, что гипотезу “спрос создает предложение” можно выражать не только линейно через избыточный спрос (см. (2.64)), но и любой монотонно возрастающей функцией избыточного спроса.

Например, реакцию экономики на дисбаланс спроса и предложения можно формализовать нелинейным уравнением

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S \exp [\alpha (Y_t^D - Y_t^S)] \quad (2.66)$$

(как обычно  $\exp(z) = e^z$ ). В этом случае снова доход растет, если избыточный спрос больше нуля и уменьшается, если он меньше нуля.

Но переход к нелинейному уравнению приводит к любопытному поведению траекторий модели (бифуркациям и хаосу) даже при прежних линейных функциях потребления и инвестиций.

Преобразуем уравнение (2.66). Нетрудно проверить, что совокупный спрос можно представить в виде

$$Y_t^D = Y^* + c [Y_t^S - Y^*]$$

и его подстановка в (2.66) дает уравнение:

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S \exp [\alpha (1 - c) (Y^* - Y_t^S)].$$

Если ввести обозначения:

$$a = \alpha(1 - c), \quad A = \exp(aY^*),$$

то уравнение преобразуется к следующему

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S A \exp(-aY_t^S). \quad (2.67)$$

Удобно ввести новую переменную

$$x_t = aY_t^S$$

для которой получается нелинейное разностное уравнение

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad \text{где } f(x) = Ax \exp(-x). \quad (2.68)$$

Примечательно, что уравнение (2.68) возникает в математической биологии для описания циклических колебаний численности популяций и носит название *уравнения Риккера*.

Ниже, в п. 2.6.5 мы проведем частичное исследование уравнения Риккера, но сначала опишем еще одно его приложение.

#### 2.6.4. Уравнение Риккера в модели адаптации рыночной цены

В п. 2.3 были проанализированы некоторые линейные модели адаптации рыночной цены на элементарном рынке. Все они получались путем линейной формализации общепринятого подхода Л. Вальраса, согласно которому цена растет при избыточном спросе и падает при избыточном

предложении. Описанный в предыдущем пункте прием нелинейного моделирования дисбаланса спроса и предложения можно применить и для формализации закона Вальраса применительно к элементарному рынку.

Пусть  $Q_{Dt}$ ,  $Q_{St}$  - зависящие от текущей цены  $P_t$  динамические функции спроса и предложения. Динамику цены опишем уравнением, аналогичным к (2.66):

$$P_{t+1} = P_t \exp [\alpha(Q_{Dt} - Q_{St})] , \quad (2.69)$$

где  $\alpha > 0$  - параметр адаптации. Если функции спроса и предложения линейны -

$$\begin{aligned} Q_{Dt} &= a - bP_t = Q^* - b(P_t - P^*) , \\ Q_{St} &= s + dP_t = Q^* + d(P_t - P^*) , \end{aligned}$$

где

$$P^* = \frac{a - c}{b + d} , \quad Q^* = a - bP^* = c + dP^*$$

- равновесные значения цены и объема, то уравнение (2.69) принимает вид

$$P_{t+1} = P_t \exp [-\alpha(b + d)(P_t - P^*)] . \quad (2.70)$$

Полагая

$$A = \exp [\alpha(b + d)P^*]$$

и вводя переменную  $x_t = \alpha(b + d)P_t$ , получим уравнение Риккера (2.68). Поскольку переменные  $x$  и  $P$  отличаются лишь масштабирующим множителем, то траектории нелинейного уравнение (2.70) наследуют все свойства уравнения Риккера.

### 2.6.5. Исследование уравнения Риккера

Вернемся к уравнению Риккера

$$x_{t+1} = f(x_t) , \quad \text{где } f(x) = Axe^{-x} , \quad A > 0 .$$

С точки зрения приложений естественно взять в качестве фазового пространства полупрямую  $R_+ = [0; +\infty)$ . Тогда  $f$  отображает  $R_+$  в  $R_+$ . Уравнение  $f(x) = x$  дает две точки равновесия  $\bar{x} = 0$  и  $x^* = \ln A$ , но вторая точка принадлежит  $R_+$  и положительна лишь при  $A > 1$ . Из методических соображений рассмотрим все значения параметра  $A > 0$ , хотя значения  $A \in (0, 1)$  не представляют интереса для модели цикла (2.67) и модели адаптации (2.70).

Для исследования нам понадобятся производные

$$f'(x) = Ae^{-x}(1-x), \quad f''(x) = -Ae^{-x}(2-x).$$

Из этих равенств легко выводится, что  $f(x)$  имеет глобальный максимум в точке  $x = 1$ , а  $f'(x)$  имеет глобальный минимум на  $R_+$  в точке  $x = 2$  и глобальный максимум при  $\bar{x} = 0$ , причем

$$f'_{min} = f'(2) = -Ae^2, \quad f'_{max} = f'(0) = A, \quad (2.71)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

(то есть, ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графиков  $f$  и  $f'$ ).

Пусть  $A \in (0, 1)$ . Тогда из равенств (2.71) получаем, что  $|f(x)| < 1$  на  $R_+$  и, в силу утверждения 2.8,  $f$  является сжимающим отображением. По теореме 2.2 единственная точка равновесия  $\bar{x} = 0$  является в этом случае глобально устойчивой.

В сомнительном случае  $A = 1$  мы имеем

$$x_{t+1} = x_t e^{-x_t} < x_t$$

(так как  $e^{-x} \in (0, 1)$  при  $x > 0$ ). Поэтому все траектории с начальной точкой  $x_0 > 0$  убывают, а, следовательно, тоже сходятся к равновесию  $\bar{x} = 0$ .

Пусть теперь  $A > 1$ . Тогда точка  $\bar{x} = 0$  теряет устойчивость в силу второго равенства в (2.71) и теоремы 2.3, но возникает точка равновесия  $x^* = \ln A$ , в которой  $f'(x^*) = 1 - x^*$ . По той же теореме она локально устойчива при  $-1 < 1 - \ln A < 1$ , т.е. при  $A \in (1, e^2)$  и  $x^* \in (0, 2)$ , но становится неустойчивой, если  $A > e^2$ . На фазовых диаграммах (рис. 2.7) изображены возможные ситуации. Первые две из них наталкивают на мысль о притяжении всех траекторий с  $x_0 > 0$  к  $x^*$ . Она оказывается верной. Установить этот факт можно следующим образом. Если  $x_0 \in (0, x^*)$ , то последовательность  $\{x_k\}$  монотонно возрастает, поскольку  $f(x) > x$  при  $x < x^*$ , будучи ограниченной  $x_* = f(x^*)$ . Поэтому  $x_t \rightarrow x^*$  при  $t \rightarrow +\infty$  при таких  $x_0$ .



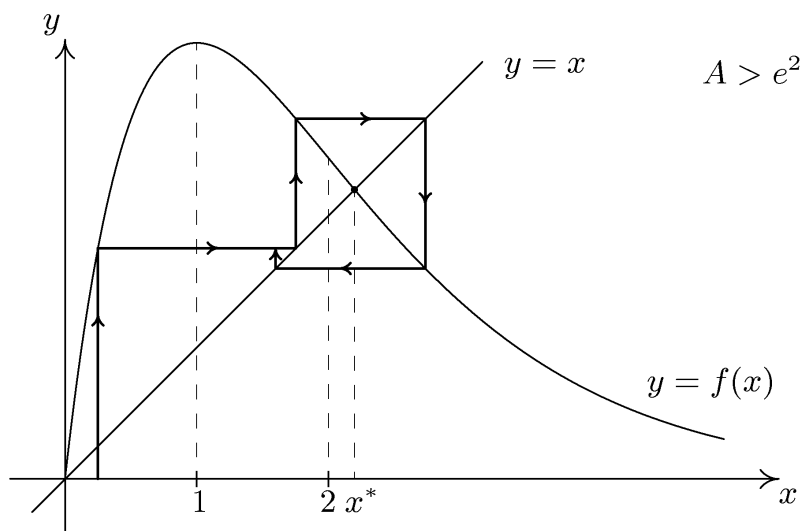
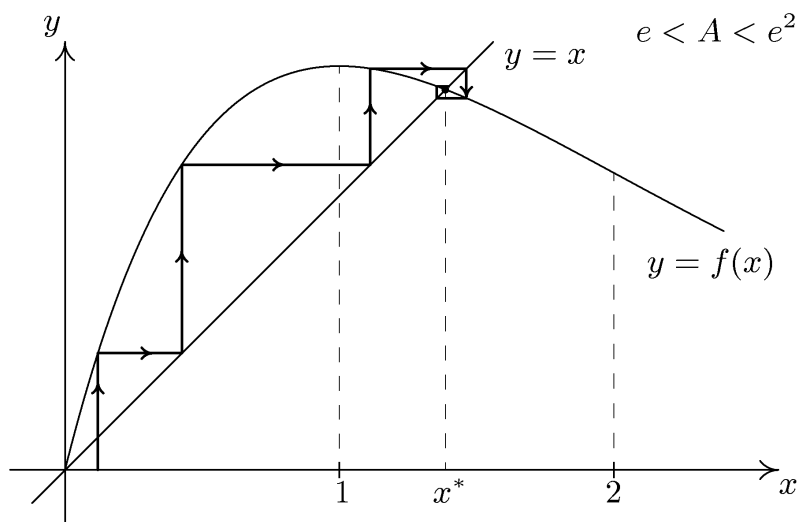
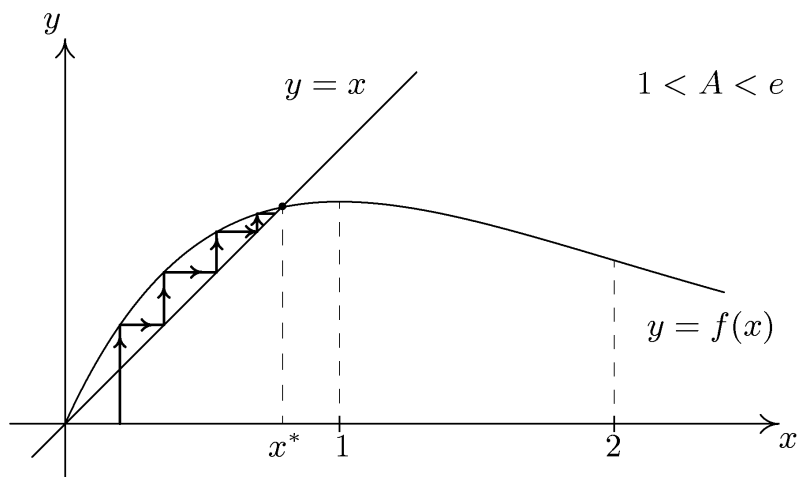


Рис. 2.7. Фазовая диаграмма уравнения Риккера при различных значениях параметра  $A$

## 2.7. Бифуркация и хаос в дискретных динамических моделях

Закон природы - хаос; порядок - лишь мечта.

Генри Адамс

Явление динамического хаоса, с которым мы встретились в модели Рикера, нельзя рассматривать как некое исключение. Аналогичные феномены в настоящее время обнаруживаются практически во всех областях знаний, где возможно математическое моделирование. Не случайно создан даже международный журнал "Chaos", не говоря уже о многочисленных книгах и статьях.

Цель данного параграфа - познакомиться с началами теории хаоса в динамических системах и, в частности, с теорией бифуркаций. Иллюстрировать вводимые понятия мы будем на примере дискретного логистического уравнения вида

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 - x_t), \quad (2.72)$$

где  $\lambda > 0$  - параметр. (О многочисленных приложениях этой модели см. п. 1.3.) Хотя уравнение (2.72) задается простой квадратичной функцией

$$f(x) = \lambda x(1 - x),$$

отображающей отрезок  $[0, 1]$  в себя, при  $\lambda \leq 4$ , модель (2.72) демонстрирует богатство динамического поведения, включая переходы от порядка к хаосу в определенной последовательности.

### Циклы и итерации поведения

Рассмотрим динамическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (2.73)$$

которая задана отображением некоторого промежутка  $S \subset R$  в себя.

Траектория  $\{x_t\}$  системы (2.73) называется *периодической с периодом  $p$* , если  $x_{t+p} = x_t$  для  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Кратко такую траекторию будем называть  $p$ -периодической. Заметим, что, как правило, под  $p$  имеется

ввиду наименьший период. Ясно, что множество значений  $p$ -периодической траектории состоит из  $p$  чисел; любые взятые подряд  $p$  членов такой траектории называют  $p$ -циклом или просто *циклом*. Циклы периода 1 совпадают с точками равновесия.

Если проанализировать рассмотренные выше примеры, то можно заметить следующее обстоятельство: если в уравнении (2.73) функция  $f(x)$  монотонно возрастает, то оно может иметь только точки равновесия и траектории, стремящиеся к ним или удаляющиеся от них при  $t \rightarrow +\infty$ ; если же  $f(x)$  монотонно убывает, то уравнение может иметь еще циклы периода 2 (как, например, уравнение  $x_{t+1} = -x_t$ ). В общем случае, когда функция  $f$  может менять свою монотонность, то оказывается, что уравнение 2.73 может иметь траектории и циклы любого периода  $p$ .

Условие существования  $p$ -циклов можно выразить, через *итерации отображения*  $f$ , которые определяются как ее последовательные суперпозиции функции  $f$ :

$$f^0(x) = f(x), f^1(x) = f(f(x)), \dots, \\ f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \quad (\text{суперпозиция } f \text{ } n \text{ раз}).$$

Через итерации траектория, стартующая из  $x_0$  запишется в виде последовательности

$$\{x_0, f^0(x_0), f^1(x_0), \dots\}.$$

Если  $p$ -периодическая траектория имеет начальную точку  $x_0$ , то должно выполняться условие  $p$ -периодичности  $x_0 = f^p(x_0)$ . Оно показывает, что  $x_0$  является решением разностного уравнения

$$x = f^p(x),$$

т.е. неподвижной точкой  $p$ -ой итерации  $f$ . Такие точки называют  $p$ -периодическими точками отображения  $f$  (или точками периода  $p$ ).

Может случиться, что условие периодичности  $x_{t+p} = x_t$  начинает выполняться только после некоторого числа итераций, скажем для  $t \geq t_0$ ; в этом случае говорят, что *траектория является в конечном итоге периодической*.

Например, если взять  $f(x) = x^2$  и  $x_0 = -1$ , то траектория имеет вид:

$$\{-1, 1, 1, 1, 1, \dots\},$$

т.е. является в конечном итоге 1-периодичной (начиная с  $t_0 = 1$ ) с одно-точечным циклом  $\{1\}$ , совпадающим с точкой равновесия.

## Бифуркация

Логистическое уравнение (2.72) имеет две точки равновесия

$$\bar{x} = 0 \text{ и } x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} .$$

С точки зрения приложений данное уравнение естественно рассмат-ривать на фазовом множестве  $x \geq 0$ , и тогда точка  $x^*$  будет  $> 0$  лишь при  $\lambda > 1$ . Однако из методических соображений мы временно примем  $S = R$ .

Поскольку

$$f'(\bar{x}) = f'(0) = \lambda, \quad f'(x^*) = 2 - \lambda,$$

то  $\bar{x}$  асимптотически устойчива при  $\lambda \in (0, 1)$  и неустойчива при  $\lambda > 1$ , а  $x^*$  асимптотически устойчива при  $-1 < 2 - \lambda < 1$ , т.е. при  $\lambda \in (1, 3)$ , и неустойчива при  $\lambda > 3$  и  $\lambda \in (0, 1)$ . Фазовая диаграмма для этих значений параметра изображена на рис.2.8.а-в.

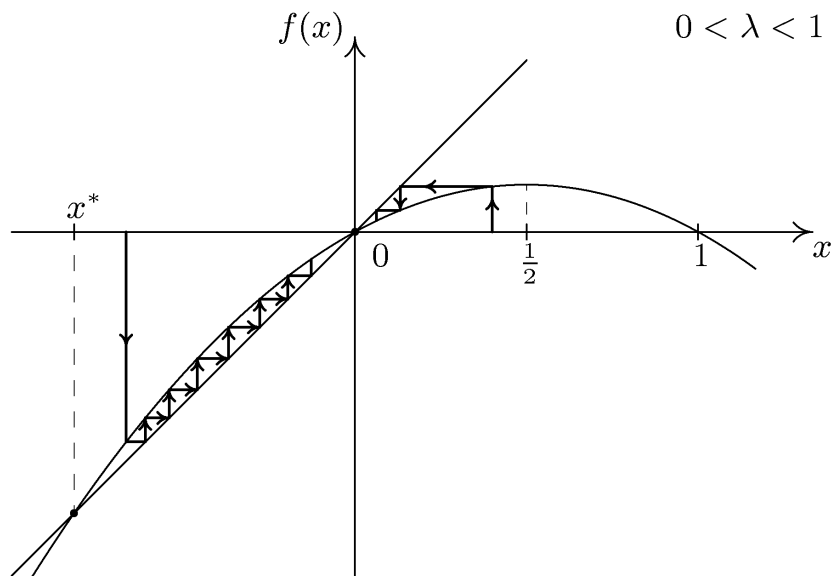


Рис. 2.8.а

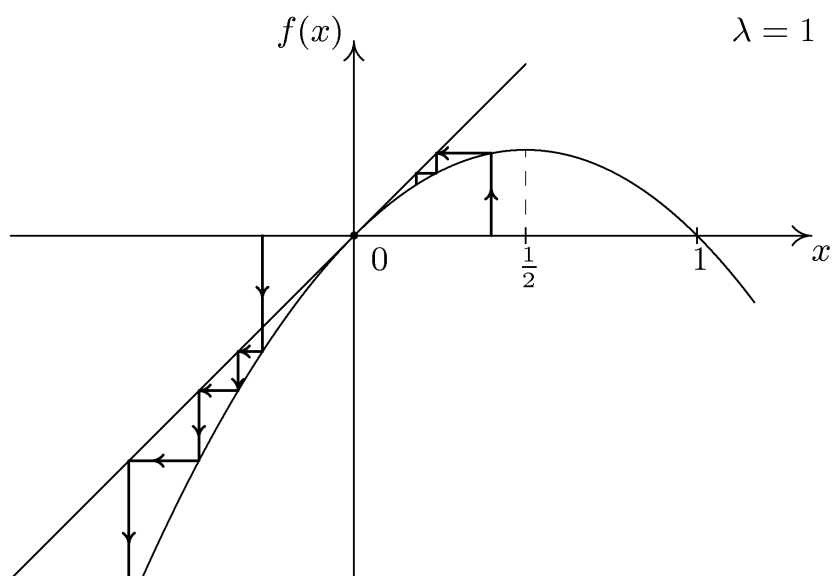


Рис. 2.8.б

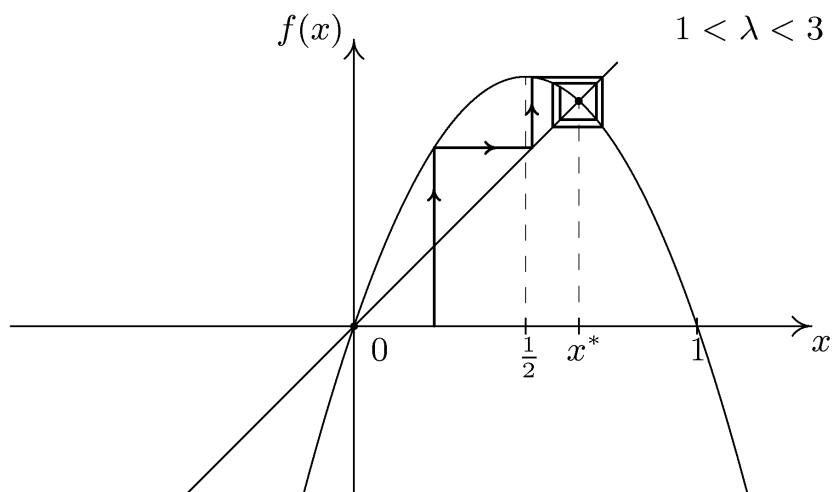


Рис. 2.8.в

Пороговые значения  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 3$  представляют особый интерес. Чтобы двигаться дальше, уточним ситуацию, которую мы имеем, и дополним список понятий.

Во-первых, точки равновесия уравнения (2.73), в которых выполняется неравенство  $|f'(x)| < 1$  или  $|f'(x)| > 1$  назовём *гиперболическими*. Такие точки заведомо являются притягивающими или отталкивающими (теорема 2.3).

Далее, так функция  $f(x)$  зависит не только от фазовой переменной  $x$ , но и от параметра  $\lambda$ , то для нее более точной будет запись  $f(x, \lambda)$  или – несколько более специальная –  $f_\lambda(x)$ . Она указывает, что при каждом фиксированном  $\lambda > 0$  рассматривается отображение  $f_\lambda : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ , так что мы имеем дело с семейством функций, зависящих от переменной  $\lambda$ .

Чаще всего при малом изменении параметра  $\lambda$  поведение траекторий динамической системы  $x_{t+1} = f_\lambda(x_t)$  меняется мало: лишь немного изменяются точки равновесия, циклы и т.д. Однако при некоторых значениях параметра происходит *бифуркация* – скачкообразное изменение качественного поведения траекторий. Например, меняется число точек равновесия или притягивающие точки становятся отталкивающими и т.д. Такие значения параметра называют бифуркационными.

В нашей логистической модели точки равновесия  $\bar{x}, x^*$  теряют гиперболичность и устойчивость при  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 3$ . *Потеря гиперболичности, как правило, сопровождается бифуркацией.* Кроме того, при  $\lambda = 1$ , когда теряет гиперболичность точка  $\bar{x} = 0$ , другая неподвижная точка  $x^*$  исчезает, сливаясь с полуустойчивой неподвижной точкой  $\bar{x}$  (рис.2.8.б). Таким образом, значение  $\lambda = 1$  является бифуркационным.

Заметим, что при  $\lambda \geq 1$  все траектории с начальной точкой  $x_0 > 1$  уходят в бесконечность (рис.2.8.в); поэтому, начиная с этого момента, мы будем анализировать уравнение (2.72) при  $x \in [0, 1]$ .

## Бифуркация удвоения периода

Следующая бифуркация происходит при  $\lambda = 3$  когда неподвижная точка  $x^*$  теряет гиперболичность и из притягивающей при  $\lambda \in (1, 3)$  превращается в отталкивающую при  $\lambda > 3$ . Но что происходит при этих  $\lambda$  с траекториями?

Вторая итерация функции  $f_\lambda$  имеет вид (для простоты будем позволять себе опускать индекс  $\lambda$ )

$$f^2(x) = \lambda^2 x(1-x)[1 - \lambda x(1-x)].$$

Покажем, что при  $\lambda > 3$  отображение  $f^2$  имеет две новые неподвижные точки  $x_1, x_2 \in (0, 1)$  и, следовательно, у логистического уравнения возникают 2-периодические траектории

$$\{x_1, x_2, x_1, x_2, \dots\} \text{ и } \{x_2, x_1, x_2, x_1, \dots\}$$

и двухточечный цикл  $\{x_1, x_2\}$  (см. рис.2.9).

Для этого отметим следующее общее свойство отображений:

2.10. Неподвижные точки  $f(x)$  остаются неподвижными для  $f^2(x)$  и всех высших итераций.

Это свойство очевидно, поскольку каждая стационарная траектория является периодической с минимально возможным периодом 1.

Для логистического отображения уравнение  $f^2(x) = x$  сводится к следующему:

$$\lambda^2(1-x)(1-\lambda x + \lambda x^2) - 1 = 0.$$

В силу утверждения 2.10, оно имеет корень  $x = x^*$ ; поэтому его левая часть должна допускать выделение множителя

$$(x - x^*) = \left(x - \frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda x - \lambda + 1}{\lambda},$$

т.е. может быть представлена в виде произведения  $(x - x^*)Q(x)$ , где  $Q(x)$  – квадратичная функция. Из этих соображений методом неопределённых коэффициентов нетрудно получить уравнение

$$Q(x) = \lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda + 1)x + \lambda + 1 = 0.$$

Оно и даёт искомые точки, которые преобразуются к виду

$$x_{1,2} = \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \pm \frac{\sqrt{\lambda + 1}\sqrt{\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Ясно, что  $x_1, x_2 \in (0, x^*)$  при  $\lambda > 3$ .

Установим теперь, что функция  $f$  отображает новые неподвижные точки для  $f^2$  друг в друга, т.е.

$$f(x_1) = x_2 \text{ и } f(x_2) = x_1.$$

Действительно, из равенства  $f^2(x_1) = x_1$  следует, что

$$f^2(f(x_1)) = f(f^2(x_1)) = f(x_1)$$

и, значит,  $f(x_1)$  тоже является неподвижной точкой для  $f^2$ . Но такой точкой может быть лишь  $x_2$  (предположение, что  $f(x_1)$  равняется 0 или  $x^*$  противоречит равенству  $f^2(x_1) = x_1$ ). Тем самым существование цикла периода 2 установлено.  $\square$

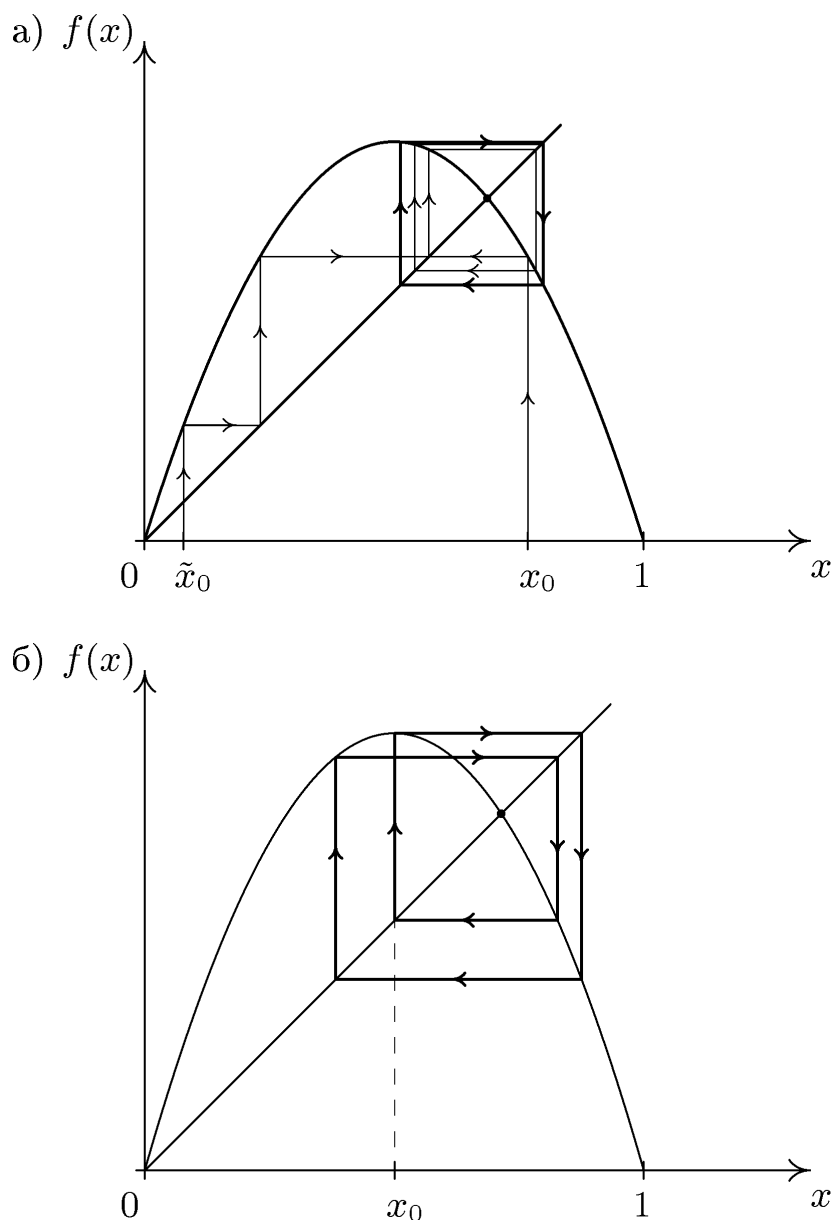


Рис.2.9: а) Устойчивый цикл периода 2 при  $\lambda = 3, 2$ ; б) сходимость траекторий к устойчивому циклу при  $\lambda = 3, 5$ . В том и другом случае  $f'(x^*) < 0$ , но наклон кривой во втором случае круче.

Покажем, что цикл  $\{x_1, x_2\}$  притягивает к себе траектории и потому может быть назван устойчивым.



Поясним смысл этого свойства.

Каждая из точек цикла является неподвижной точкой для отображения  $f^2$  и, следовательно, точкой равновесия разностного уравнения

$$x_{t+2} = f(f(x_t)), \quad (2.74)$$

где правая часть совпадает с  $f(x_{t+1})$ . Поэтому можно говорить об устойчивости точек  $x_1, x_2$  в уравнении (2.74). С другой стороны, если взять любую траекторию уравнения (2.73) и выбрать из неё любую подпоследовательность, соседние элементы которой отстоят друг от друга на 2 периода, то получим некоторую траекторию уравнения (2.74). Цикл  $\{x_1, x_2\}$  является притягивающим или устойчивым, если каждая из его точек асимптотически устойчива для уравнения (2.74) и, следовательно, притягивает к себе некоторую подпоследовательность любой траектории близких к ней точек. Кратко говорят: цикл притягивает траектории близких к нему точек.

Итак, при  $\lambda = 3$  имеет место *бифуркация удвоения периода*: притягивающая точка равновесия  $x^*$  (цикл периода 1) превращается в отталкивающую, а рядом с ней возникает устойчивый цикл вдвое большего периода. Эта картина сохраняется до некоторого значения  $\lambda$ , при котором цикл периода 2 теряет устойчивость. Это значение  $\lambda$  соответствует обращению производных

$$(f^2)'(x_i) = \frac{d}{dx}[f^2(x_i)], \quad i = 1, 2$$

в минус единицу и приближенно равно  $\lambda_2 = 3,45$ . При прохождении параметром  $\lambda$  этого значения график итерации  $f_\lambda^4$  вблизи каждой из точек  $x_1, x_2$  становится "двугорбым" и напоминает рис. 2.10.

При  $\lambda > \lambda_2$  рядом с каждой из точек  $x_1, x_2$  появляются еще две неподвижные точки итерации  $f^4$ , т.е. возникает цикл периода 4, причем устойчивый. Таким образом, при  $\lambda = \lambda_2$  имеет место еще одна бифуркация удвоения периода.

При дальнейшем увеличении  $\lambda$  появляется бесконечная последовательность  $\{\lambda_n\}$  значений параметра  $\lambda$  такая, что при  $\lambda = \lambda_n$  происходит потеря устойчивости цикла периода  $2^n$  и возникает устойчивый цикл периода  $2^{n+1}$ .

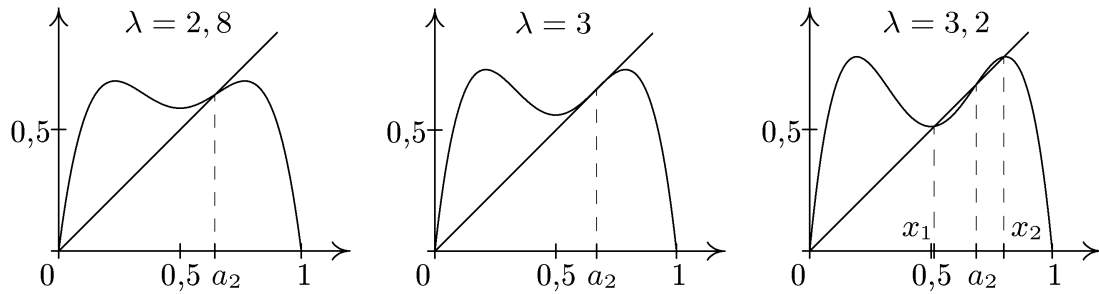


Рис. 2.10. Точки  $x_1, x_2$  образуют цикл периода 2. При  $\lambda = 3$  производная  $f'_\lambda$  в точке  $x^*$  проходит через 1.

В 1978 г. М.Фейгенбаум нашел следующую закономерность в образовании бифуркационных значений параметра:

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \approx 4,669201609\dots$$

Отсюда нетрудно вывести, что последовательность  $\{\lambda_n\}$  сходится к пределу со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $1/\delta$ , где  $\delta = 4,6692$  — число, получившее название константы Фейгенбаума.

Примечательно, что эта константа *универсальна* в следующем смысле: оказывается, что последовательность бифуркаций удвоения периода возникает во многих разностных уравнениях первого порядка, в которых отображение  $f(x)$  имеет единственный максимум, т.е. его график "одногогорбый", как у логистического отображения. Этот каскад бифуркаций приводит систему от устойчивых периодических к хаосу (см.ниже), причем величина

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \delta \quad (2.75)$$

одинакова для всех таких уравнений (и равна  $\delta$ ).

Наглядно пронаблюдать каскад бифуркаций в логистическом уравнении (и ему подобных) можно с помощью следующего численного эксперимента. Выберем какое-нибудь начальное значение, например  $x_0 = 0,1$  и сделаем 100 итераций отображения  $f_\lambda$ . Затем отложим значения  $f_\lambda^n(x_0)$ , полученные в результате следующих 300 итераций, по вертикальной оси, а соответствующие значения  $\lambda$  — по горизонтальной. По оси  $\lambda$  пройдем отрезок от 2,8 до 4 с шагом 0,001. Полученное множество (см. рис. 2.11) носит название *бифуркационной диаграммы*. На ней хорошо видны типичные бифуркации типа "вил" в точках удвоения периода.

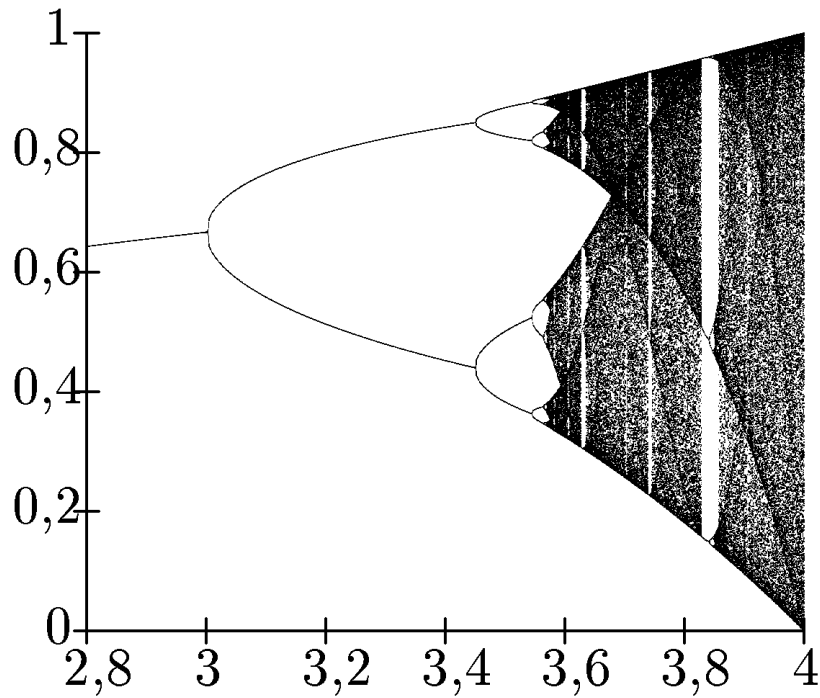


Рис. 2.11

## Хаос

Пользуясь константой Фейгельбаума можно вычислить предел последовательности  $\{\lambda_n\}$ . Для логистического отображения оказывается, что

$$\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \approx 3,569.$$

При  $\lambda = \lambda_\infty$  число периодических точек становится бесконечным – возникает так называемый *аттрактор Фейгенбаума*, притягивающий к себе ”почти все” траектории из фазового отрезка  $[0, 1]$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$  от значения  $\lambda_\infty$  до 4 поведение траекторий логистического уравнения оказывается столь сложным, что получило название *хаотического*.

Во-первых, обратим внимание, что бифуркационная диаграмма на некоторых участках полуинтервала  $(\lambda_\infty, 4]$  чрезвычайно разряжена. Например, эта картина наблюдается на участке около значения  $\lambda \approx 3,83$ , и существует притягивающий цикл периода 3. Оказывается, что *наличие цикла 3 автоматически влечет наличие циклов всех периодов  $p = 1, 2, 3, \dots$* . Этот удивительный общий факт установлен в 1964 году

украинским математиком А.Н. Шарковским и вытекает из следующей знаменитой теоремы.

**Теорема Шарковского.** Пусть  $S$  — отрезок числовой прямой и  $f : S \rightarrow S$  — непрерывное отображение. Если  $f$  имеет точку периода  $p$ , то  $f$  имеет также точки периода  $q$  для любого натурального  $q > p$  из следующего списка (называемого упорядочением Шарковского):

$$\begin{array}{cccccc} 3, & 5, & 7, & 9, & \dots & \\ 2 \cdot 3, & 2 \cdot 5, & 2 \cdot 7, & 2 \cdot 9, & \dots & \\ 2^2 \cdot 3, & 2^2 \cdot 5, & 2^2 \cdot 7, & 2^2 \cdot 9, & \dots & \\ 2^3 \cdot 3, & 2^3 \cdot 5, & 2^3 \cdot 7, & 2^3 \cdot 9, & \dots & \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots & \\ \dots, & 2^p, & \dots, & 2^2, & 2^1, 1. & \end{array}$$

*Замечание.* а)  $S$  может быть конечным или бесконечным интервалом.  
 б) Так как число 3 — первое в списке Шарковского, то из существования цикла периода 3 вытекает существование циклов периода  $q = 1, 2, 3, \dots$ .  
 в) Из списка Шарковского можно заметить, что число различных периодов для циклов отображения  $f$  конечно только в том случае, когда периоды выражаются числами  $2^p, \dots, 2^2, 2^1, 1$  для некоторого значения  $p$ . Если же существует цикл нечетного периода, то число периодов бесконечно.

Таким образом, в области "хаоса" имеются "окна периодичности" — узкие интервалы значений параметра, в которых существуют периодические траектории. Теорема Шарковского ничего не говорит об их устойчивости; однако, они с необходимостью должны быть отталкивающими, поскольку на бифуркационной диаграмме наблюдаются именно притягивающие точки.

Периодичность Шарковского уже говорит о сложности динамических систем, задающихся "одногоорбыми" отображениями, типа логистического <sup>1</sup>. Однако наиболее важной, определяющей чертой хаоса является *существенная зависимость от начальных условий*, т.е. от выбора стартовой точки  $x_0$ . Малые изменения начальной точки могут породить траектории, даже отдаленно не напоминающие исходную траекторию точки  $x_0$  при достаточно больших  $t$ . Это иллюстрирует рис. 2.12, на котором изображены две траектории логистического уравнения при  $\lambda = 3, 7 > \lambda_\infty$  с  $x_0 = 0, 20$  и  $x_0 = 0, 21$ : подобие этих траекторий в нескольких

<sup>1</sup>Такие отображения (с одной точкой экстремума) носят названия унимодальных.

первых периодах быстро нарушается, причем обе они ведут себя хаотично, поскольку стартовые точки не являются периодическими.

Это явление образно называют *эффектом бабочки* (легкий взмах крыльев бабочки в Пекине сегодня вызывает изменение в погоде в Нью-Йорке завтра). Последовательное действие отображения  $f_\lambda$  на стартовую точку подобно своеобразному "перемешиванию" с непредсказуемыми последствиями. Такие хаотические перемешивания можно наблюдать и в реальной жизни: струйка сигаретного дыма постепенно дробится на вихри и рассеивается в виде облаков причудливой формы; на рынке акций происходит намного больше "выбросов" цен, чем предсказывают простые линейные и статистические модели и т.д..

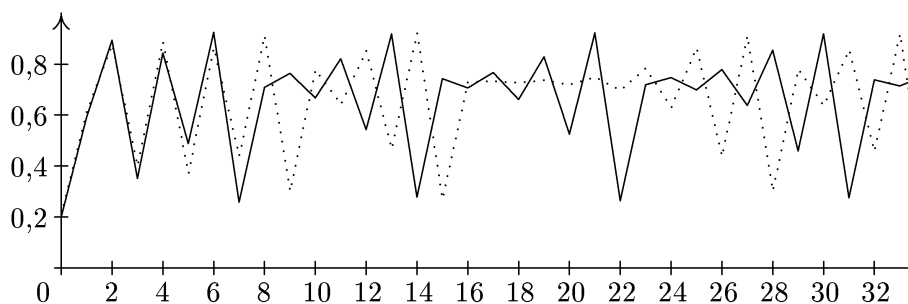


Рис. 2.12

Мы видим, что уже одномерные нелинейные дискретные модели могут обладать весьма сложным поведением решений. В непрерывных (дифференциальных) моделях переходы от порядка к хаосу тоже случаются; однако они возможны, начиная только с трехмерных систем.

Живое обсуждение значения сложности и хаоса динамических систем применительно к экономике содержится в книге [6]. Мы настоятельно рекомендуем читателю обратиться к ней.

## Основные понятия

*Периодическая точка отображения  $f$*  – точка  $\bar{x}$ , такая, что

$$f^p(\bar{x}) = \bar{x} \text{ для некоторого целого } p > 0$$

( $f^p$  –  $p$ -ая итерация  $f$ )

$p$  – *периодическая точка  $f$*  – неподвижная точка отображения  $f^p$ ,

т.е. точка равновесия разностного уравнения  $x_{t+1} = f^p(x_t)$

*Устойчивость и асимптотическая устойчивость*

$p$  – *периодической точки  $\bar{x}$*  означает выполнение этих свойств

для  $\bar{x}$  в этом разностном уравнении

*Цикл (орбита) периода  $p$*  – последовательность  $\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots,$

$f^{p-1}(\bar{x})\}$  стартовая из  $p$  – периодической точки  $\bar{x}$

*Бифуркация и бифуркация удвоения периода*

*Бифуркационная диаграмма*

*Окна периодичности*

*Периодичность Шарковского (теорема Шарковского)*

*Хаос*

## Задачи

2.43. Для данных разностных уравнений найти точки равновесия, исследовать их на устойчивость с помощью фазовых диаграмм:

$$a) x_{t+1} = 2x_t - 10x_t^2; \quad б) x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t^2 - x_t.$$

2.44. Исследовать на устойчивость точки равновесия логистического уравнения

$$x_{t+1} = ax_t - bx_t^2, \quad a, b > 0.$$

Как влияет на устойчивость параметр  $b$ ?

2.45. Используя фазовую диаграмму для отображения  $f_4^p$  ( $f_\lambda$ - отображения из логистического уравнения (2.72) на  $[0, 1]$  при  $p = 1, 2, 3, \dots$ ), убедиться, что  $f_4$  имеет  $2^p$  периодических точек (периода  $p$ ).

2.46. Найти точное решение уравнения

$$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t).$$

2.47. Показать, что функция  $f_\lambda$  из уравнения (2.72) обладает свойством :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_2^p(x) = \frac{1}{2}, \text{ если } x \in (0; 1).$$

2.48. Показать, что если в уравнении (2.72)  $\lambda \in (1, 2]$  и  $x \in (x^*, \frac{1}{2})$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_\lambda^p(x) = x^*.$$

2.49. Доказать, что 2-цикл уравнения (2.72) (найденный в пункте 2.7) является притягивающим при  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6}]$ .

2.50. а) Показать, что квадратичное разностное уравнение  $x_{t+1} = x_t^2 + c$  можно преобразовать в логистическое уравнение (2.72);

б) Найти точки равновесия  $x_1^*, x_2^*$  квадратичного уравнения;

в) Найти значение параметра  $c$ , при которых точка  $x_1^*$  является устойчивой, полуустойчивой и неустойчивой;

г) То же, что в задаче в), для точки  $x_2^*$ ;

д) При каком значении  $c_0$  возникает бифуркация удвоения периода при  $c > c_0$ ?

2.51. Построить бифуркационную диаграмму для квадратичного отображения  $Q_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$  на отрезке  $[-1, 1]$  при  $\lambda \in (0, 2]$ .

2.52. Исследовать на устойчивость неподвижные точки разностных уравнений:

а)  $x_{t+1} = x_t + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x_t)$ ;

б)  $x_{t+1} = 0,5 \sin(\pi x_t)$ ;

в)  $x_{t+1} = 2x_t \exp(-x_t)$ .

2.53. Динамика численности популяций птиц описывается разностным уравнением

$$x_{t+1} = \begin{cases} 3, 2x_t & \text{если } 0 \leq x_t \leq 1 \\ 0, 5x_t & \text{если } x_t > 1. \end{cases}$$

Найти точки равновесия и исследовать их на устойчивость.

2.54. Рассмотреть нелинейную паутинообразную модель рынка, в которой функция спроса

$$Q_{Dt} = 2 - P_t,$$

функция предложения

$$Q_{St} = P_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

и в каждом периоде цена устанавливается так, чтобы уравновесить спрос с предложением. Исследовать качественно поведение траекторий модели.

2.55. Динамика численности популяции, подверженной промыслу, описывается разностным уравнением

$$x_{t+1} = 3x_t - 3x_t^2 - v_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $v_t$  - интенсивность добычи.

а) Исследовать модель на устойчивость при постоянных  $v_t \equiv \frac{7}{48}$  и  $v_t \equiv \frac{1}{3}$ . Как сказывается изменение интенсивности промысла на точках равновесия и их устойчивости?

б) Рассмотреть стратегию промысла с обратной связью, которая описывается равенством

$$v_t = cx_t$$

где  $c > 0$  — параметр, регулирующий интенсивность добычи. Как сказывается изменение этого параметра на качественных свойствах решения соответствующего логистического уравнения?

2.56. *Мальтузианская модель экономического роста.* Т. Мальтус предполагал, что темп роста населения находится в обратной зависимости от индивидуального дохода. Эту гипотезу можно описать разностным уравнением

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r - \frac{b}{w_t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$



где  $N_t$  — численность населения в период  $t$ ,  $w_t$  — доход этого периода,  $r, b > 0$  — параметры. В соответствии с этим уравнением улучшение условий жизни замедляет темп роста населения, верхняя граница которого ограничена мальтузианским темпом естественного роста  $r$ .

Индивидуальный доход рассчитывается по совокупному доходу экономики:  $w_t = Y_t/N_t$ , а совокупный доход описывается степенной производственной функцией

$$Y_t = N_t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

(масштабирующий множитель справа для простоты берем равным единице).

а) Используя приведенные соотношения, преобразовать разностное уравнение к следующему уравнению роста

$$N_{t+1} = N_t(1 + r - bN_t^{1-\alpha}).$$

б) Показать, что отображение  $f(N)$ , соответствующее этому уравнению, имеет "одногорбый" график с единственным максимумом в точке

$$\bar{N} = \left[ \frac{1+r}{b(2-\alpha)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Поэтому можно ожидать, что в этой модели могут наблюдаться все типы поведения траекторий, которые встречаются в логистическом уравнении и зависят от выбора параметров.

в) Построить фазовую диаграмму уравнения роста (обратить внимание, что точка равновесия возникает правее вершины "горба") и найти неподвижную точку  $N^* = r/b$ .

г) Показать, что критерий локальной устойчивости точки  $N^*$  выполняется, если

$$r(1 - \alpha) < 2.$$

д) Оценить значение  $r$ , удовлетворяющее этому условию устойчивости при высоких значениях эластичности выпуска  $\alpha$  (порядка 0,99) и низких (порядка 0,01). Какой из этих вариантов оценок  $r$  представляется наиболее реалистичным?

е) Проведите численные эксперименты на компьютере, позволяющие "нащупать" возможные бифуркации в данной модели, наличие циклов и хаотического роста.

## Глава 3

# Дифференциальные уравнения первого порядка

### 3.1. Основные понятия и элементы качественного анализа

#### 3.1.1. Понятие решения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(t, y, y') = 0, \quad (3.1)$$

где  $t$  — независимая переменная,  $y = y(t)$  — неизвестная функция,  $y' = y'(t) = dy/dt$  — её производная,  $F$  — заданная функция трёх переменных  $t, y, y'$ .

Дифференциальное уравнение (3.1) называется *обыкновенным*, поскольку неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной  $t$ ; мы интерпретируем её как непрерывно меняющееся время. Это уравнение имеет *первый порядок*, так как содержит только первую производную искомой функции. Заметим, что эта производная обязана действительно входить в уравнение (3.1), ибо иначе оно не было бы дифференциальным.

Например, уравнения

$$y + t^2 - 1 = 0, \quad y(t + 3) - y(t + 1) = 0, \quad y\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right) - t^2 = 0$$

не являются дифференциальными: первое из них алгебраическое (из него  $y$  находится элементарно:  $y(t) = 1 - t^2$ ), а два других носят название функциональных; такие уравнения в данной книге не рассматриваются. Отметим, что хотя второе уравнение по записи напоминает разностное, в действительности таковым не является, если  $t$  изменяется непрерывно.

**Определение 3.1.** *Решением* дифференциального уравнения (3.1) называется *любая* функция  $y = \varphi(t)$ , подстановка которой (вместе с производной  $y' = \varphi'(t)$ ) в равенство (3.1) даёт тождество, т.е.

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0. \quad (3.2)$$

Это определение предполагает, что:

- (а) функция  $y = \varphi(t)$  определена на некотором интервале  $I = (a, b)$  (случаи  $a = -\infty$  или  $b = +\infty$  не исключаются);
- (б)  $\varphi(t)$  дифференцируема на  $I$  и, следовательно, непрерывна;
- (в) тождество (3.2) выполняется при всех  $t \in I$ .

Интервал  $I$  называется *интервалом определения* решения  $\varphi(t)$ .

Коротко говорят: функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет уравнению (3.1) на  $I$ .<sup>2</sup>

**Пример 3.1.** Покажем, что функция

$$y = \varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

является решением уравнения

$$ty' + y = \cos(t)$$

на каждом из интервалов  $I_1 = (-\infty, 0)$  и  $I_2 = (0, +\infty)$ .

Действительно, на этих интервалах  $\varphi(t)$  определена и непрерывно дифференцируема, причём

$$y' = \varphi'(t) = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2} \quad (t \neq 0).$$

Подстановка  $y$  и  $y'$  в левую часть уравнения даёт

$$t \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2} + \frac{\sin(t)}{t} = \cos(t) \quad (t \neq 0),$$

что совпадает с правой частью уравнения.  $\square$

Заметим, что, при подстановке проверяемой функции в уравнение,  $y, y'$  заменялись на  $\varphi, \varphi'$  в соответствии с определением решения дифференциального уравнения. Практически промежуточное обозначение решения через  $\varphi(t)$  часто опускается и оно обозначается через  $y(t)$ .

<sup>2</sup>Определение 3.1 предполагает, что функция  $F$  определена при всех значениях переменных  $t, y, y'$ . В противном случае нужно дополнительно требовать от решения ДУ выполнения условия  $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D$ , где  $D$  – область определения  $F$ .

**Пример 3.2** (уравнение "взрыва"). Рассмотрим уравнение

$$y' - y^2 = 0, \quad \text{или} \quad y' = y^2, \quad (3.3)$$

и функцию

$$y(t) = \frac{1}{C - t} = (C - t)^{-1}, \quad (3.4)$$

зависящую от постоянной  $C$ .

Эта функция определена и непрерывно дифференцируема при  $t \neq C$ , т.е. на интервалах времени  $I_1 = (-\infty, C)$  и  $I_2 = (C, +\infty)$ . Для неё

$$y'(t) = \frac{1}{(C - t)^2} = y^2(t).$$

Следовательно, на каждом из указанных интервалов  $y(t)$  удовлетворяет данному уравнению при *любой* постоянной  $C$ . Формула (3.4) дает решение уравнения (3.3) на интервале  $I_1$  и на интервале  $I_2$ , причем это два *разных* решения, так как интервалы  $I_1, I_2$  разделены точкой  $t = C$ . Поскольку  $C$  произвольно, то в действительности мы имеем бесчисленное множество решений данного дифференциального уравнения. Отметим, что ещё одно постоянное решение  $y(t) \equiv 0$  нельзя получить из формулы (3.4) ни при каком выборе  $C$ .

Любое из решений (3.4) становится неограниченным при  $t \rightarrow C$  или, образно говоря, ведёт себя взрывоподобно. (Сделайте набросок графиков этих решений при фиксированном параметре  $C$ .)

### 3.1.2. Решение начальной задачи и общее решение

Дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для выделения конкретного, *частного решения* задаётся *начальное условие* вида

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad \text{т.е.} \quad y(t_0) = y_0.$$

Числа  $t_0, y_0$  называют начальными данными.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

Например, начальная задача для уравнения "взрыва"

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 \quad (t_0 = 0, y_0 \neq 0)$$

имеет решение

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t} .$$

При  $y_0 > 0$  оно существует только для  $t < 1/y_0$  и уходит на бесконечность за конечное время ( $y(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow 1/y_0$ ).

Если в этом уравнении интерпретировать  $y$  как численность пуляции, то оно моделирует её динамику при следующей гипотезе: скорость роста пропорциональна количеству пар (или парных контактов). Поскольку решение уравнения становится неограниченным за конечное время, то принятую гипотезу надо признать нереалистичной.

Вообще говоря, решить данное дифференциальное уравнение - это значит найти все его решения. Поэтому хотелось бы иметь процедуру “производства” всех решений из некоего общего решения, подобно тому, как все частные решения линейной алгебраической системы  $Ax = b$  получаются из общего. Мы примем в качестве “рабочего” следующее определение.

Функцию  $y = \Phi(t, C)$ , зависящую от времени и произвольной постоянной, назовём общим решением дифференциального уравнения (3.1), если:

- (а) при любом *фиксированном*  $C$  она удовлетворяет уравнению (3.1) (т.е. является его решением);
- (б) все решения уравнения (3.1) можно получить из  $\Phi$  путём выбора значения постоянной  $C$ .

Например, *линейное уравнение роста*

$$y' - ay = 0, \quad \text{или} \quad y' = ay \tag{3.5}$$

имеет общее решение

$$y = \Phi(t, C) = Ce^{at}; \tag{3.6}$$

его частное решение, отвечающее начальным данным  $(t_0, y_0)$ , дается формулой

$$y = \varphi(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} \tag{3.7}$$

и получается из общего при  $C = y_0 e^{-t_0}$ . (Покажите, что уравнение (3.5) не имеет решений, отличных от (3.6) или (3.7)).

Однако общее решение дифференциального уравнения (в смысле “рабочего” определения) существует не всегда. Скажем, в примере 3.2 функция (3.4) удовлетворяет условию (а) (на любом из интервалов  $I_1$  или  $I_2$ ),

но не позволяет получить тривиальное решение  $y \equiv y^* = 0$ . Точно также, для уравнения

$$(y')^2 - 4y = 0 \quad (3.8)$$

функция

$$y = \Phi(t, C) = (t + C)^2$$

удовлетворяет условию (а), но не удовлетворяет (б), так как ещё одно решение  $y \equiv y^* = 0$  получить из неё невозможно ни при каком выборе  $C$ .

Подобные случаи “особых” решений встречаются в *нелинейных* уравнениях, и мы будем считать их исключительными.

### 3.1.3. Интегральные кривые. Фазовая прямая

Для геометрического представления решений дифференциального уравнения (кратко, ДУ) используется координатная плоскость переменных  $(t, y)$ , причем по её горизонтальной оси абсцисс откладывается независимая переменная  $t$ . График любого решения  $y = \varphi(t)$  называется *интегральной кривой*.

Как правило, через заданную точку  $(t_0, y_0)$  плоскости  $(t, y)$  проходит только одна интегральная кривая данного ДУ, т.е. *интегральные кривые не могут пересекаться*. Это означает, что решение начальной задачи (3.1), (3.5) *существует и единственно*, если только функция  $F$  в (3.1) имеет “хорошие” свойства.

Совокупность всех интегральных кривых данного ДУ образует *семейство* кривых, которое заполняет координатную плоскость  $(t, y)$ , за исключением, возможно, некоторых особых множеств.

Например, семейство интегральных кривых уравнения (3.5) задается формулой общего решения (3.6), в котором постоянная  $C$  меняется (служит параметром). Экспоненциальные траектории этого уравнения заполняют всю плоскость  $(t, y)$  (часть их показана на рисунке 1.2). Формула (3.7) также задаёт семейство интегральных кривых линейного уравнения роста; в этом случае семейство получается путём варьирования начальной точки  $(t_0, y_0)$ .

Семейство интегральных кривых уравнения “взрыва” из примера 3.2 показано на рис.3.1 (см. формулу (3.4)). Гиперболы, лежащие в верхней полуплоскости  $y > 0$ , соответствуют решениям на интервалах вида

$(-\infty, C)$ , а в нижней - на интервалах  $(C, +\infty)$ . Стрелки на интегральных кривых показывают направление движения в прямом времени - при возрастании  $t$ . Поскольку для данного ДУ  $y' = y^2 > 0$  при  $y \neq 0$ , то все решения возрастают, за исключением тривиального  $y \equiv 0$ . Геометрически решение начальной задачи состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку  $(t_0, y_0)$ .

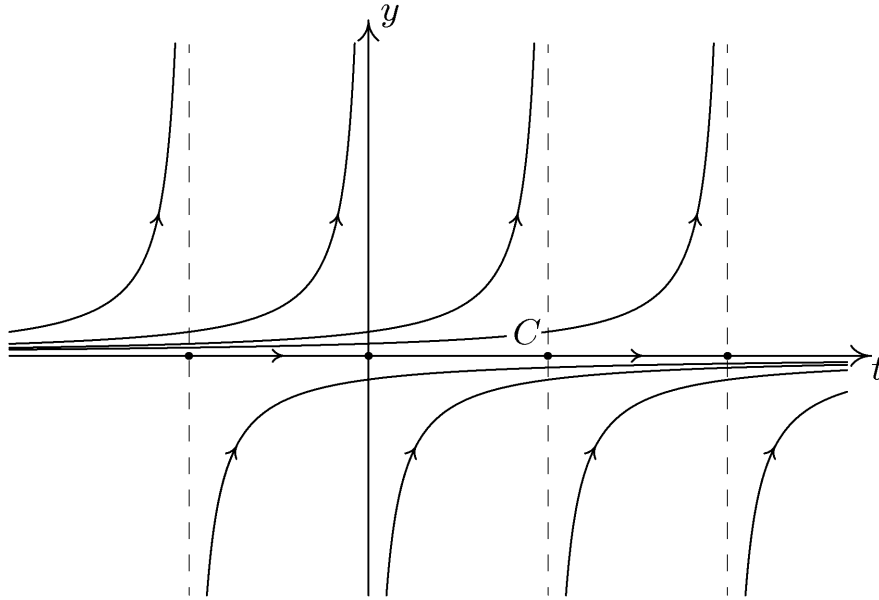


Рис. 3.1. Интегральные кривые уравнения  $y' = y^2$ .

Полезной является следующая интерпретация ДУ.

Дифференциальное уравнение моделирует развитие во времени какого-либо процесса или системы. Состояние этого процесса в любой момент времени характеризуется единственным показателем  $y$  (для процессов, которые описываются ДУ 1-ого порядка). Поэтому  $y$  часто называют *переменной состояния* или *фазовой переменной* (помимо того, что то же обозначение используется для неизвестной функции). Состояние процесса в каждый момент времени можно представлять точкой на *фазовой прямой* - на числовой оси  $Oy$ ; её называют ещё *фазовым пространством* данного ДУ. Дополнив фазовую прямую осью времени получают координатную плоскость  $(t, y)$  - *расширенное фазовое пространство*.

*Замечание.* В приложениях интегральные кривые часто называют траекториями. Для разнообразия (и краткости) мы позволим себе использовать этот термин, хотя он и не является общепризнанным в теории ДУ.

### 3.1.4. Дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной

Изучать ДУ проще, если оно разрешено относительно  $y'$  т.е. может быть записано в виде

$$y' = f(t, y), \quad (3.9)$$

где  $f(t, y)$  - заданная функция. ДУ (3.9) - это непрерывный аналог разностного уравнения

$$y_{t+1} = y_t + f(t, y).$$

Правая часть уравнения (3.9) – функция  $f(t, y)$  “управляет” скоростью моделируемого процесса. Каждой точке плоскости  $(t, y)$  она ставит в соответствие некоторое число, равное производной решения, график которого проходит через эту точку. Но производная совпадает с тангенсом угла наклона касательной к интегральной кривой в точке. Если в каждой точке плоскости  $(t, y)$  (точнее в достаточно большом числе точек этой плоскости) изобразить маленькую часть прямой, проходящей через данную точку и имеющую угловой коэффициент  $k$ , равный  $f(t, y)$ , то получим картину, изображённую на рис.3.2. Она называется *полем направлений* данного ДУ; оно полностью задается функциями  $f(t, y)$ . Интегральные кривые должны касаться поля направлений в каждой своей точке. Такова ещё одна геометрическая интерпретация ДУ (3.9).

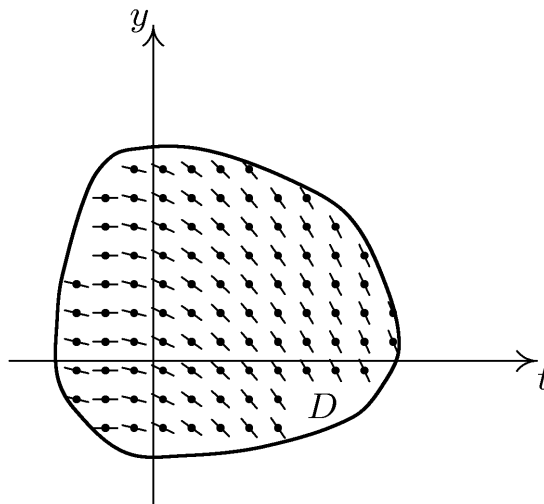


Рис.3.2. Поле направлений в области  $D$

*Замечание* (о переходе от уравнения (3.1) к (3.9). Если равенство (3.1) позволяет однозначно выразить  $y'$  через  $t$  (т.е. соотношение (3.1) определяет  $y'$  как однозначную неявную функцию  $t, y$ ), то получающееся при



этом уравнение (3.9) будет равносильно исходному. Но при нарушении однозначной разрешимости могут возникнуть особенности. В примере 3.1 разрешение относительно  $y'$  возможно только при  $t \neq 0$ ; как следствие, правая часть разрешённого уравнения

$$y' = -\frac{y}{t} + \cos(t)$$

оказывается не определенной при  $t = 0$  и интегральные кривые не проходят через фазовую прямую (уравнение которой  $t = 0$ ).

### 3.1.5. Неавтономные и автономные дифференциальные уравнения

ДУ называется *неавтономным*, если независимая переменная явно входит в него (а не только через неизвестную функцию). ДУ называется *автономным*, если оно не содержит явно независимой переменной и может быть записано в виде

$$y' = f(y). \quad (3.10)$$

Из рассмотренных выше только ДУ примера 3.1 было неавтономным.

С точки зрения приложений автономность означает, что моделируемый процесс или система эволюционируют в условиях постоянной во времени внешней среды - постоянства технологий, природных условий, возмущений и управлений.

### 3.1.6. Точки равновесия и устойчивость

В автономном ДУ (3.10) скорость эволюции зависит только от состояния: все решения возрастают при  $f(y) > 0$  и убывают при  $f(y) < 0$ . Этим неравенствам соответствуют некоторые интервалы на фазовой прямой.

Особый интерес в автономных ДУ вызывают *постоянные решения*, если они существуют. Для каждого такого решения  $y = y^*$  производная  $y' \equiv 0$ , так что они должны находиться путем решения уравнения

$$f(y) = 0.$$

Значение  $y = y^*$  называется *точкой равновесия* ДУ (3.10), если  $f(y^*) = 0$ . В точке равновесия моделируемая система как бы “застрева-

ет”: она остаётся в ней навсегда. Поэтому для точек равновесия используются и другие термины: *стационарное решение, неподвижная точка, точка покоя, состояние равновесия.*

Например, уравнения  $y' = 2y$ ,  $y' = y^2$  имеют по одной точке равновесия  $y^* = 0$ , логистическое уравнение

$$y' = y(10 - 2y) \quad (3.11)$$

– две точки  $y^* = 0$  и  $\bar{y} = 5$ , ДУ  $y' = \sin y$  – бесчисленное множество точек равновесия, а ДУ  $y' = y^2 + 1$  не имеет их вовсе.

Качественное представление о поведении решений автономного ДУ можно получить, не зная явных решений. Для этого используется фазовая диаграмма ДУ - система координат  $(y, y')$  с графиком функции  $y' = f(y)$  (см. рис.3.3а) и 3.4а)). Точки пересечения этого графика с горизонтальной фазовой прямой соответствуют точкам равновесия данного ДУ; решения возрастают или убывают на интервалах между ними, что показывается стрелкой на фазовой прямой. Практически ту же информацию даёт *одномерный фазовый портрет* – фазовая прямая с нанесёнными на неё точками равновесия и отмеченными стрелками (или знаками “+”, “-”) интервалами возрастания и убывания решений - интервалами знакопостоянства  $f(y)$  (рис.3.3б), 3.4б)).

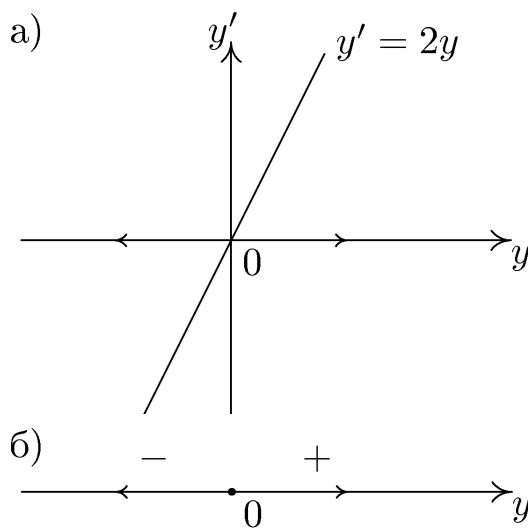


Рис. 3.3. Фазовый портрет ДУ  $y' = 2y$

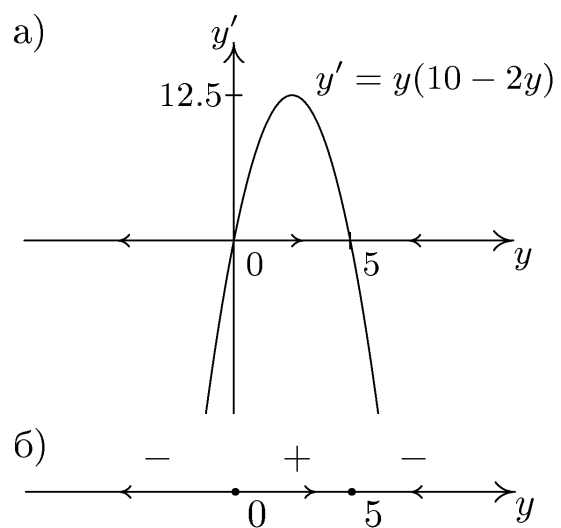


Рис. 3.4. Фазовый портрет логистического ДУ (3.11)

Фазовый портрет позволяет судить об устойчивости или неустойчивости точек равновесия. Эти понятия связаны со сходимостью решений к

данной точке равновесия при  $t \rightarrow +\infty$ .

Точку равновесия называют *изолированной*, если вблизи неё нет других точек равновесия на фазовой прямой. Для изолированной точки равновесия возможны только четыре *локальных* фазовых портрета, которые показаны на рис.3.5 вместе с названиями соответствующих состояний равновесия (локальность означает, что мы интересуемся только окрестностью  $y^*$ ).

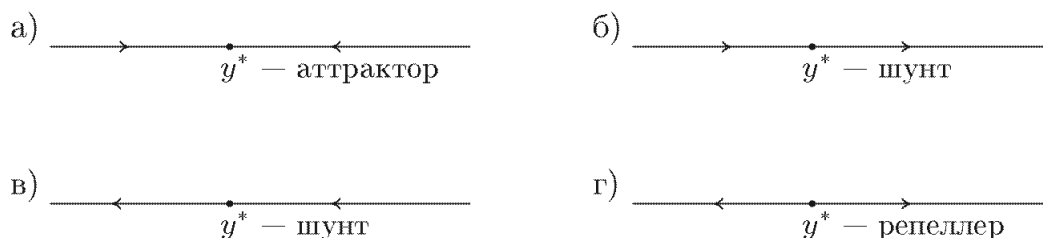


Рис. 3.5. Возможные фазовые портреты одной изолированной точки равновесия

Точку равновесия  $y^*$  называют *устойчивой* (точнее *асимптотически устойчивой*), если все траектории данного ДУ, начинающиеся в некоторой окрестности точки  $y^*$ , сходятся к  $y^*$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Образно говоря, устойчивая точка равновесия притягивает к себе все траектории, стартовые из близких к ней состояний.

На рис.3.5 лишь в случае а) точка равновесия  $y^*$  устойчива, а во всех других случаях — *неустойчива*; точки типа “шунта” иногда называют *полустойчивыми* — они притягивают к себе траектории из своей левой или правой полуокрестности; от неустойчивой точки типа репеллера траектории разбегаются. Эти варианты можно иллюстрировать поведением интегральных кривых на плоскости  $(t, y)$  как показано на рис.3.6. В случае устойчивой неподвижной точки прямая  $y = y^*$  является асимптотой интегральных кривых, начинающихся при  $t = 0$  вблизи  $y^*$ . Это является отражением предельного условия

$$y(t) \rightarrow y^* \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad (3.12)$$

которое выполняется для всех решений с начальным условием  $y(0) = y_0 \in O$ , где  $O$  — окрестность точки  $y^*$  на фазовой прямой из определения устойчивости.

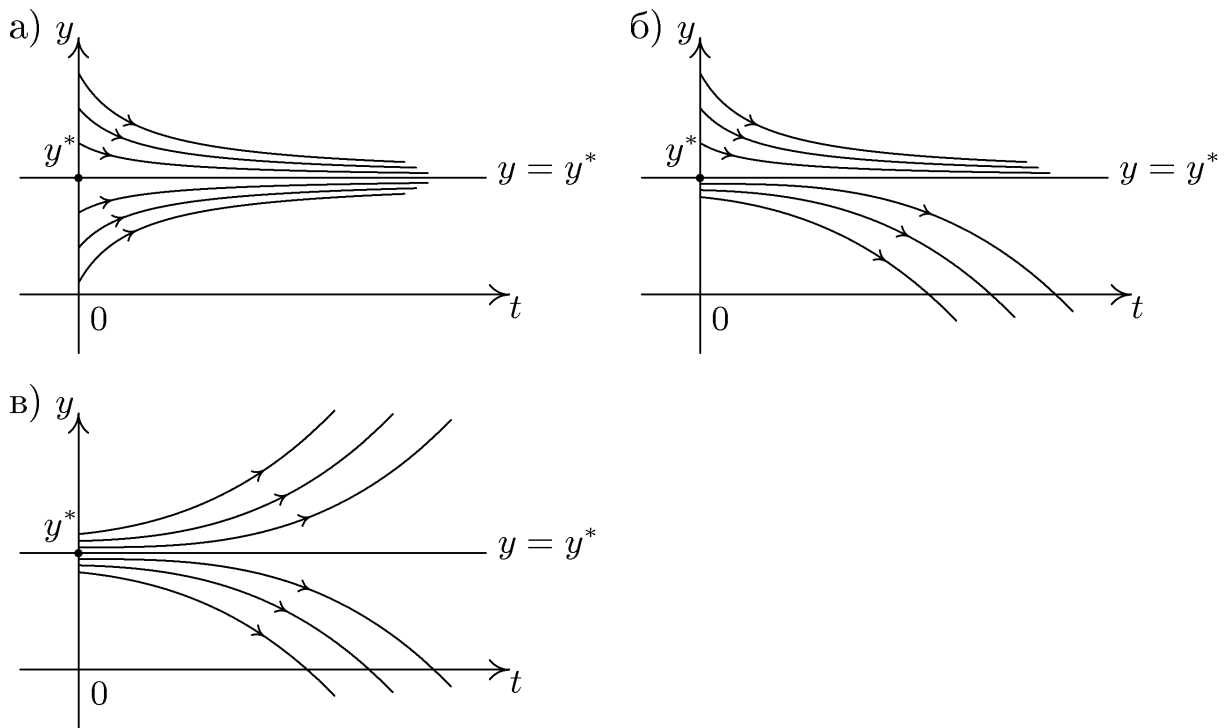


Рис. 3.6. Качественное поведение интегральных кривых в случае устойчивой (а)) полустойчивой(б)) и неустойчивой (в)) неподвижной точки

Нетрудно получить аналитический критерий устойчивости неподвижной точки  $y^*$  ДУ (3.10), если только функция  $f(y)$  является гладкой, т.е. непрерывно дифференцируемой.

Если  $f'(y^*) < 0$ , то точка равновесия  $y^*$  устойчива, а если  $f'(y^*) > 0$  – то неустойчива.

Действительно, в первом случае мы будем иметь неравенство  $f'(y^*) < 0$  в некоторой окрестности  $y^*$  из-за непрерывности  $f'$ . Следовательно, функция  $f(y)$  строго убывает в этой окрестности, причём  $f'(y^*) = 0$ ; поэтому  $f(y) > 0$  слева от  $y^*$  и  $f(y) < 0$  справа. Чередование знаков  $f$  “плюс-минус” на фазовом портрете соответствует устойчивости  $y^*$ .

Во втором случае аналогичное рассуждение приводит к выводу о неустойчивости  $y^*$ .  $\square$

Например, для логистического уравнения (3.11)  $f(y) = 10y - 2y^2$ ,  $f'(y) = 10 - 4y$ ; отсюда  $f'(0) = 10 > 0$  и точка равновесия  $y^* = 0$  неустойчива, а  $f'(5) = -10 < 0$  и равновесие  $\bar{y} = 5$  устойчиво.

Рассмотрим ещё один содержательный

**Пример 3.3.** *Модель нащупывания рыночной цены по Вальрасу.* Рассмотрим рынок простого товара, который характеризуется функциями спроса  $D(p)$  и предложения  $S(p)$ . Вальрасовское правило “нащупывания” рыночной цены невидимым аукционистом по избыточному спросу может моделироваться разными способами и, соответственно, разными ДУ. Наиболее очевидный из них - это принятие гипотезы, что скорость изменения цены пропорциональна избыточному спросу. Эта гипотеза в непрерывном времени описывается ДУ

$$p' = \alpha [D(p) - S(p)] , \quad (3.13)$$

где  $\alpha > 0$  - параметр.

Если ввести функцию избыточного спроса

$$E(p) = D(p) - S(p),$$

то данное уравнение примет вид  $p' = \alpha E(p)$  и, следовательно, рост или снижение цены определяется знаком  $E(p)$  :

$$p' \begin{cases} > 0, & \text{если } E(p) > 0, \\ < 0, & \text{если } E(p) < 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Точки равновесия ДУ (3.13) находятся из уравнения  $E(p) = 0$ ; они совпадают с ценой равновесия в статической модели рынка.

Допустим, что функции спроса и предложения линейны, т.е.

$$D(p) = a - bp, \quad S(p) = c + dp,$$

где  $a, b, c, d > 0$ . Тогда

$$E(p) = (a - c) - (b + d)p,$$

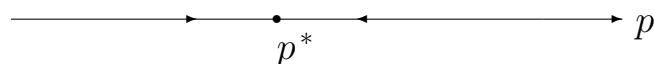
и имеется одна точка равновесия

$$p^* = \frac{a - c}{b + d}.$$

Условие (3.14) примет вид

$$p' \begin{cases} > 0, & \text{если } p < p^*, \\ < 0, & \text{если } p > p^*, \end{cases}$$

и фазовый портрет в данном случае указывает на глобальную устойчивость рыночного равновесия (точки  $p^*$ ).



Применим теперь аналитический критерий, считая  $D(p)$ ,  $S(p)$  произвольными нелинейными гладкими функциями с единственным изолированным состоянием равновесия  $p^* > 0$  ( $E(p^*) = 0$ ). Поскольку  $\alpha > 0$ , то в данном случае условие устойчивости  $f'(y^*) < 0$  сводится к неравенству  $E'(p^*) < 0$ , т.е.

$$D'(p^*) < S'(p^*).$$

При обычных условиях монотонности функций спроса и предложения ( $D'(p) < 0$ ,  $S'(p) > 0$  при  $p > 0$ ) условие устойчивости оказывается выполненным, и фазовый портрет ничем не отличается от линейного случая.

Таким образом, при моделировании динамики цены уравнением (3.13) все траектории цены притягиваются к точке равновесия и она устойчива при естественных предположениях о функциях спроса и предложения. Параметр  $\alpha > 0$  оказывает влияние лишь на скорость сходимости рыночной цены к равновесной и носит название параметра адаптации.

### 3.1.7. Дополнение о качественных свойствах автономных дифференциальных уравнений

Мы закончим предварительное знакомство с качественными методами исследования ДУ несколькими замечаниями и уточнениями.

(1) Каждой точке равновесия  $y^*$  соответствует постоянное решение  $y \equiv y^*$ . Поэтому *никакая другая траектория не может достигнуть состояния  $y^*$  за конечное время* (если функция  $f$  является гладкой).

Действительно, если допустить, что найдётся другая траектория  $y = y(t)$  со свойством  $y(\bar{t}) = y^*$  в некоторый момент  $\bar{t}$ , то получится, что через начальную точку  $(\bar{t}, y^*)$  плоскости  $(t, y)$  проходит две траектории (интегральные кривые). Но это противоречит единственности решения начальной задачи.

(2) Решения автономного ДУ  $y' = f(y)$  инвариантны относительно сдвига по времени. Это означает, что если  $y(t)$  – решение данного ДУ на интервале времени  $I$ , то при любом числе  $c$  функция  $y_c(t) = y(t + c)$  тоже является решением на  $I$ .

Действительно, поскольку  $y'(t) = f(y(t))$ , то по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'_c(t) = y'(t + c) = f(y(t + c)) = f(y_c(t)) \text{ при } t \in I,$$

т.е.  $y_c(t)$  - тоже решение.

Заметим, что график функции  $y_c(t)$  получается из графика функции  $y(t)$  путем сдвига вдоль оси времени влево на величину  $c$ . Поэтому семейство интегральных кривых автономного ДУ можно получить путём указанного сдвига одной из них. Более точно, в общем случае плоскость  $(t, y)$  разбивается на горизонтальные полосы, в каждой из которых семейство траекторий можно получить сдвигами одной интегральной кривой (см. рис.3.1).

(3) Если ДУ имеет бесконечно много точек равновесия, то среди них могут оказаться неизолированные. В этом случае варианты локальных фазовых портретов на рис.3.5 должны быть дополнены.

Рассмотрим, например, точку равновесия  $y^*$ , к которой сходится некоторая последовательность  $\{y_n\}$  других точек равновесия (рис.3.7).

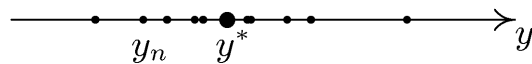


Рис. 3.7. Сходящаяся к  $y^*$  последовательность точек равновесия

С одной стороны, все траектории, начинающиеся в любой малой окрестности точки  $y^*$ , остаются в ней навсегда (это следует из свойства (1)). Именно это свойство называют устойчивостью неподвижной точки. Но  $y^*$  не является асимптотически устойчивой - нельзя указать окрестность  $y^*$ , в которой направления движения фазовой точки вели бы к  $y^*$ . Аналитический критерий устойчивости здесь тоже не работает: поскольку  $f(y^*) = 0, f(y_n) = 0 \forall n$ , то

$$\frac{f(y_n) - f(y^*)}{y_n - y^*} = 0 \quad \forall n,$$

а так как  $y_n \rightarrow y^*$ , то мы получаем отсюда, что  $f'(y^*) = 0$ .

(4) Этот пример показывает, что мы допускаем неточность, когда используем упрощённую терминологию и опускаем эпитет “асимптотически”. Необходимо различать следующие два понятия:

1) Точка равновесия  $y^*$  устойчива, если в ее произвольно малой окрестности остаются все траектории, начинающиеся достаточно близко к  $y^*$ ; формально:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  такое, что неравенство  $|y(t) - y^*| < \epsilon \forall t > 0$  выполняется для всех решений  $y(t)$  с начальным условием  $|y(0) - y^*| < \delta$ ; (см. рис. 3.8.а)).

2) Точка равновесия  $y^*$  асимптотически устойчива, если она устойчива и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$$

для всех решений с достаточно малым  $|y(0) - y^*|$  (рис. 3.8.б)).

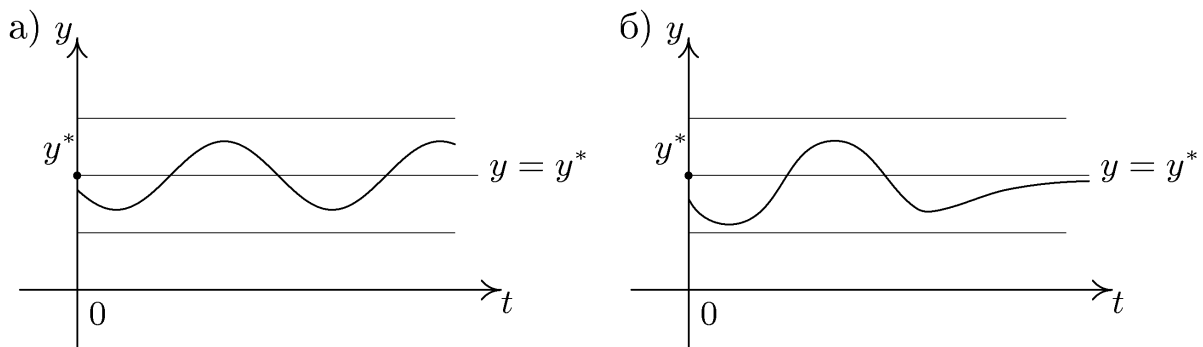


Рис.3.8. Устойчивое (а)) и асимптотически устойчивое состояние равновесия (б))

Отметим, что благодаря инвариантности решений относительно сдвига по времени, в этих определениях начальный момент времени выбран равным нулю.

ДУ  $y' = 0$  доставляет элементарный пример, иллюстрирующий различие введенных понятий. В нём существует бесчисленное множество точек равновесия, каждая из которых устойчива, но не асимптотически устойчива.

Основы современной теории устойчивости динамических систем были заложены русским математиком А.М. Ляпуновым в конце XIX века. Рассмотренные виды устойчивости называют *устойчивостью по Ляпунову*, существуют и другие понятия устойчивости (структурная, орбитальная, топологическая и т.д.).



(5) Автономное ДУ  $y' = f(y)$  задаёт не только состояния, в которых решения возрастают, убывают или “застевают”, но и выпуклость (вогнутость) интегральных кривых.

Действительно, выпуклость или вогнутость интегральной кривой определяется знаком второй производной  $y'' = d^2y/dt^2$ : если  $y'' > 0$ , то кривая выпукла, а если  $y'' < 0$  то вогнута. Но производную  $y''$  можно получить (как функцию от  $y$ ) просто продифференцировав обе части уравнения по  $t$ , считая  $y = y(t)$  решением ДУ. Это даёт:

$$y'' = f'(y)y' = f'(y)f(y).$$

Т.о. знак  $y''$  совпадает со знаком известной функции

$$g(y) = f'(y)f(y).$$

На множестве  $g(y) > 0$  интегральные кривые выпуклы, а на множестве  $g(y) < 0$  вогнуты. Эти множества представляют собой интервалы на фазовой прямой, которые разделены точками перегиба интегральных кривых (в них  $y'' = 0$ ). На плоскости  $(t, y)$  этим интервалам соответствуют горизонтальные полосы выпуклости/вогнутости траекторий.

Чтобы ознакомиться с этой технологией качественного анализа более детально, рекомендуем читателю сразу обратиться к п. 3.3, где дан качественный анализ логистического уравнения.

### Основные понятия

Решение ДУ 1-го порядка

Начальное условие

Начальная задача или задача Коши

Решение начальной задачи

Общее решение ДУ 1-го порядка

Интегральная кривая

Автономные и неавтономные ДУ

Фазовый портрет ДУ

Точки равновесия

Устойчивые и неустойчивые точки равновесия

## Задачи

В задачах 3.1 – 3.20 построить фазовый портрет и классифицировать точки на устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые.

$$3.1. y' = y - 7$$

$$3.2. y' = 1 - 5y$$

$$3.3. y' = 4 - \frac{y}{2}$$

$$3.4. y' = 9y - 11$$

$$3.5. y' = ay + by^2 \text{ при } a, b > 0 \text{ и } y \geq 0$$

$$3.6. y' = ay + by^2 \text{ при } a, b > 0, y \in R$$

$$3.7. y' = y(y - 1)(y - 2) \text{ при } y > 0$$

$$3.8. y' = e^y - 1$$

$$3.9. y' = e^{-y} - 1$$

$$3.10. y' = -\frac{2 \operatorname{arctg} y}{1 + y^2}$$

$$3.11. y' = a(1 - y)^2, a > 0$$

$$3.12. y' = -a(y - 1)^2, a > 0$$

$$3.13. y' = y^2(y^2 - 1)$$

$$3.14. y' = y(1 - y^2)$$

$$3.15. y' = ay - b\sqrt{y}, a, b > 0, y \geq 0$$

$$3.16. y' = y^2(4 - y)^2$$

$$3.17. y' = y^2(1 - y^2)$$

$$3.18. y' = \frac{y}{y^2 + 1}$$

$$3.19. y' = e^{-y}y(y - 2)$$

$$3.20. y' = e^y \cos y$$

## 3.2. Аналитическое решение некоторых типов ДУ первого порядка

Нахождение решений ДУ тесно связано с операцией интегрирования и поэтому часто называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если следовать традициям, то задача интегрирования данного ДУ считается решенной, когда решение выражено в квадратурах, т. е. через элементарные функции и интегралы от них. При этом, как правило, речь идет об общем решении, или решении с произвольными начальными данными.

Подобно тому, что существуют “не берущиеся” интегралы, в столь полном объеме удается решить отнюдь не все ДУ (и, тем более, системы ДУ). Например, безобидное с виду ДУ  $y' = y^2 - t$  не допускает решение в квадратурах.

В этом разделе будут рассмотрены некоторые из типов ДУ, которые могут быть решены стандартными аналитическими приемами. Поскольку все они основаны на интегрировании функций, мы начнем с краткого обзора необходимых сведений из этого раздела математического анализа.

### 3.2.1. Интегрирование: сводка основных понятий и формул

Напомним читателю важнейшие факты из теории интегрирования функций.

(1) Пусть  $I$  — промежуток числовой прямой  $Ox$  (отрезок, интервал, полуинтервал и т. д.) и функция  $f(t)$  непрерывна на  $I$ . Тогда первообразной функции  $f(t)$  называется любая дифференцируемая на  $I$  функция  $F(t)$ , удовлетворяющая равенству

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

(2) Если  $F(t)$  — любая первообразная функции  $f(t)$  на  $I$ , то любая другая первообразная функции  $f(t)$  представима в виде  $F(t) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

(3) *Неопределенный интеграл*  $\int f(t)dt$  от функции  $f(t)$  на промежутке  $I$  определяется равенством

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

где  $F$  — *любая* первообразная  $f$  на  $I$ , а  $C$  — произвольная постоянная ( $t$  — переменная интегрирования,  $f(t)$  — интегрант).

(4)

$$\frac{d}{dt} \left( \int f(t)dt \right) = f(t),$$

т. е. производная интеграла равна интегранту, и

$$d \left( \int f(t)dt \right) = f(t)dt,$$

(образно говоря, символ дифференциала “уничтожает” символ интеграла),

$$\int df(t) = f(t) + C$$

(символ интеграла “уничтожает” символ дифференциала).

(5) *Определенный интеграл* от функции  $f(t)$  по отрезку  $[a, b] \subset I$  обозначается символом  $\int_a^b f(t)dt$  и вычисляется по формуле *Ньютона-Лейбница* (основной формуле интегрального исчисления)

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a);$$

здесь  $F(t)$  — *любая* первообразная функции  $f$  на  $[a, b]$ ,  $a$  — нижний предел интегрирования,  $b$  — верхний,  $[a, b]$  — отрезок интегрирования.

(6) *Определенный интеграл с переменным верхним пределом*

$$\int_a^t f(s)ds \quad (t \in I)$$

является первообразной функции  $f(t)$ , т.е.

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s)ds = f(t) \quad \text{при } t \in I$$

(это утверждение иногда называют теоремой Барроу).

(7) Связь неопределенного интеграла с определенным дается *формулой Барроу*

$$\int f(t)dt = \int_a^t f(s)ds + C,$$

где  $t \in I$ , а  $C$  – произвольная постоянная.

(8) Дифференцируемая на  $I$  функция  $f(t)$  находится по своей производной с помощью формулы

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$$

(частный случай формул Ньютона-Лейбница и Барроу).

(9) При *любом* выборе точек  $a, b, c$  из промежутка  $I$  имеет место *разложение*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(10) Операция интегрирования *линейна*, т.е. если  $f(t), g(t)$  непрерывны на промежутке  $I$ , то для любых чисел  $\alpha, \beta$

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt \quad (a, b \in I);$$

аналогичное свойство имеет место для неопределенного интеграла.

(11) Таблица основных интегралов (первообразных):

$$\int \cos t dt = \sin t + C \quad (t \in R);$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C \quad (t \in R);$$

$$\int e^t dt = e^t + C \quad (t \in R);$$

$$\int a^t dt = a^t / \ln a + C \quad (t \in R);$$

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{при } n \in N \text{ и } t \in R;$$

$$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{при } \alpha \neq -1 \text{ и } t > 0;$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C \quad \text{при } t \neq 0.$$

### 3.2.2. Простейшие ДУ

Самым простым ДУ 1-го порядка является уравнение вида

$$y' = f(t) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = f(t), \quad (3.15)$$

где  $f(t)$  – заданная *непрерывная* функция на интервале  $I = (a, b)$ .

Задача нахождения решения уравнения (3.15) – это классическая задача анализа – восстановления функции по ее производной. Она решается с помощью неопределенного интеграла и ее *общее решение* дается формулой

$$y(t) = \int f(t)dt + C, \quad t \in I, \quad (3.16)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Поскольку одной из первообразных функции  $f$  является

$$\int_{t_0}^t f(s)ds \quad (t_0 \in I \text{ произвольно}),$$

то общее решение ДУ (3.15) можно записать и по *формуле Барроу*:

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds + y(t_0), \quad t \in I \quad (3.17)$$

(в этом случае  $C = y(t_0)$ ).

*Частное* решение, соответствующее начальному условию  $y(t_0) = y_0$  непосредственно получается из формулы (3.17); его можно найти и из (3.16) путем выбора произвольной постоянной.

Из формул общего решения следует, что интегральные кривые простейшего ДУ получаются путем сдвига графика любой первообразной функции  $f$  вдоль оси ординат.

**Пример 3.4.** Простейшее ДУ  $y' = \sin 2t$  имеет общее решение

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t + C,$$

определенное при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Чтобы найти решение задачи Коши

$$y(0) = 1 \quad (\text{т.е. при } t_0 = 0, y_0 = 1),$$

положим в общем решении  $t = 0, y(0) = 1$ ; получим:

$$1 = -\frac{1}{2} \cos 0 + C \quad \text{т.е. } 1 = -\frac{1}{2} + C.$$

Отсюда  $C = 3/2$  и решение начальной задачи таково:

$$y = \varphi(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{2}.$$

**Пример 3.5.** Рассмотрим ДУ  $y' = 1/t$ . Его правая часть  $f = 1/t$  непрерывна на интервалах  $I_1 = (-\infty, 0)$  и  $I_2 = (0, +\infty)$ , а в точке  $t = 0$  имеет разрыв 2-го рода. Ее первообразная  $F(t) = \ln |t|$  определена на объединении  $I_1$  и  $I_2$ ; формула

$$y = \varphi(t) = \ln |t| + C, \quad t \neq 0$$

задает общее решение в полуплоскостях  $t < 0$  и  $t > 0$ .

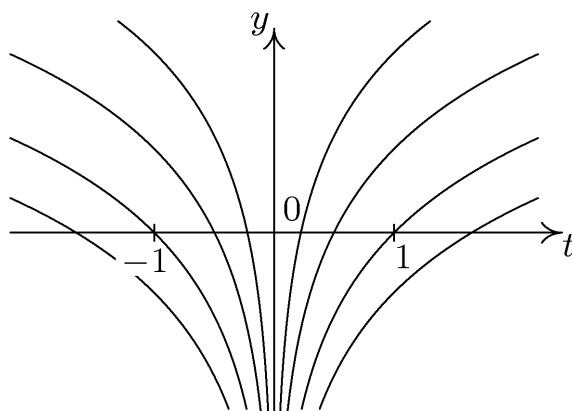


Рис. 3.9. Интегральные кривые уравнения  $y' = 1/t$

Интегральные кривые на рис.3.9 проходят через каждую точку  $(t, y)$ , исключая особую прямую  $t = 0$ . Заметим, что для любой интегральной кривой  $y = \varphi(t)$  производная становится неограниченной при подходе к точке  $t = 0$ :

$$\varphi'(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} \varphi'(t) = -\infty,$$

если кривая лежит в полуплоскости  $t < 0$ , и  $\varphi'(0+) = +\infty$ , если кривая лежит в полуплоскости  $t > 0$ .

### 3.2.3. Линейные уравнения

Рассмотрим линейное ДУ 1-го порядка

$$y' = a(t)y + b(t), \quad (3.18)$$

где  $a(t), b(t)$  – непрерывные функции на некотором интервале времени  $I$ . Т.о., в общем случае уравнение (3.18) *неавтономно* (имеет переменные коэффициенты  $a, b$ ).

При  $b(t) \not\equiv 0$  уравнение (3.18) называют *неоднородным*, а при  $b(t) \equiv 0$  – *однородным*.

Начнем с частных случаев.

(1) Линейное автономное уравнение

$$y' = ay + b \quad (a \neq 0) \quad (3.19)$$

при  $b = 0$  рассмотрено в п. 3.1. (см. равенства (3.5) – (3.7)). При  $b \neq 0$  его решение можно получить путем сведения к соответствующему однородному уравнению.

Для этого найдем точку равновесия  $y^* = -b/a$  и сделаем в уравнении *подстановку*

$$z = y - y^* \quad (\text{тогда } y = z + y^*).$$

Дифференцированием подстановки по  $t$  находим ДУ для  $z$  :

$$z' = ay + b = a(z + y^*) + b = az,$$

так как  $ay^* + b = 0$ . Получили однородное уравнение  $z' = az$ , общее решение которого нам известно:

$$z(t) = Ce^{at}.$$



Возвращаясь к исходной неизвестной функции, обратной заменой получаем *общее решение* уравнения (3.19):

$$y(t) = Ce^{at} + y^*. \quad (3.20)$$

*Решение с начальным условием*  $y(t_0) = y_0$  можно найти путем выбора постоянной  $C$  в формуле (3.20). Нетрудно проверить, что оно дается формулой

$$y(t) = (y_0 - y^*)e^{a(t-t_0)} + y^*. \quad (3.21)$$

Из формул (3.20) и (3.21) следует, что при  $a < 0$  точка равновесия устойчива: решение, начинающееся в любой начальной точке  $(t_0, y_0)$ , сходится к  $y^*$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Если же  $a > 0$ , то равновесие неустойчиво: при  $t \rightarrow +\infty$  все решения становятся неограниченными, за исключением равновесного.

(2) Рассмотрим *неавтономное однородное* уравнение

$$y' = a(t)y. \quad (3.22)$$

Покажем, что его общее решение дается формулой

$$y(t) = Ce^{A(t)} \quad \text{где} \quad A(t) = \int a(t)dt \quad (3.23)$$

– любая первообразная функции  $a(t)$ , а  $C$  – произвольная постоянная.

Для этого проверим, что функция (3.23) удовлетворяет условиям (а), (б) определения 3.1 общего решения.

а) Найдем производную функции  $y(t)$ . Поскольку  $A'(t) = a(t)$  по определению первообразной, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'(t) = C \frac{d}{dt} \left[ e^{A(t)} \right] = Ce^{A(t)} \cdot a(t) = a(t)y(t).$$

Значит, при любом  $C$  функция (3.23) удовлетворяет ДУ (3.22).

б) Покажем, что любое решение уравнения (3.23) можно получить из формулы (3.23) выбором произвольной постоянной.

Заметим сначала, что при  $C = 0$  из формулы (3.23) получается *тривиальное* частное решение  $y \equiv 0$ .

Пусть теперь  $\bar{y}(t)$  – произвольное решение данного ДУ на интервале времени  $I$ , а  $y_1(t)$  – любое решение, получающееся из формулы (3.23) при некотором  $C = C_1 \neq 0$  (тогда, очевидно,  $y_1(t) \neq 0$ ).

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \frac{\bar{y}(t)}{y_1(t)}, \quad t \in I.$$

Ее дифференцирование дает:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\bar{y}'(t)}{y_1(t)} - \bar{y}(t) \frac{y_1'(t)}{y_1^2(t)} = \\ &= \left\{ \text{используем, что } \bar{y}' = a\bar{y}, y_1' = ay_1 \right\} = \\ &= a(t) \frac{\bar{y}(t)}{y_1(t)} - a(t) \frac{\bar{y}(t)}{y_1(t)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x(t)$  постоянна на  $I$ :

$$\frac{\bar{y}(t)}{y_1(t)} = c = \text{const},$$

или

$$\bar{y}(t) = cy_1(t) = cC_1 e^{A(t)}.$$

Сравнение с формулой (3.23) показывает, что  $\bar{y}(t)$  получается из нее, если выбрать  $C = cC_1$ . Значит, формулой (3.23) описываются все решения ДУ (3.22).  $\square$

Легко убедиться, что решение данного уравнения с начальным условием  $y(t_0) = y_0$  дается формулой

$$y(t) = y_0 e^{A(t) - A(t_0)} \quad (3.24)$$

(проверьте). Заметим, что  $y(t) \equiv 0$  при  $y_0 = 0$ , т. е. *линейное однородное уравнение с нулевым начальным условием имеет только тривиальное решение*. Этот факт часто оказывается полезным.

**Пример 3.6.** Рассмотрим линейное ДУ  $ty' - y = 0$ . При  $t \neq 0$  его можно разрешить относительно  $y'$  и получить однородное уравнение

$$y' = \frac{y}{t}.$$

Здесь функция  $a(t) = 1/t$  непрерывна на интервалах  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  и на каждом из них

$$A(t) = \int a(t)dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t|.$$

(При нахождении  $A(t)$  постоянную интегрирования можно положить нулем; в противном случае она все равно войдет в постоянную общего решения.) В соответствии с формулой (3.23), общее решение запишется в виде

$$y(t) = Ce^{\ln|t|} = \begin{cases} -Ct, & \text{если } t < 0 \\ Ct, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Соответствующее семейство интегральных кривых представляет собой всевозможные *полупрямые*, исходящие из начала координат плоскости  $(t, y)$ , но не содержащие его (рис.3.11). Исключить также нужно полупрямые, залегающие на фазовой прямой, поскольку наши выводы справедливы только при  $t \neq 0$ . Стрелки на полупрямых указывают *направление* движения по траекториям при возрастании  $t$ ; оно определяется знаком производной  $y' = y/t$  в различных областях плоскости. На оси времени залегают графики двух постоянных решений –  $y = 0$  на  $(-\infty; 0)$  и  $y = 0$  на  $(0; +\infty)$ ; стрелки на них отсутствуют. (Почему?)

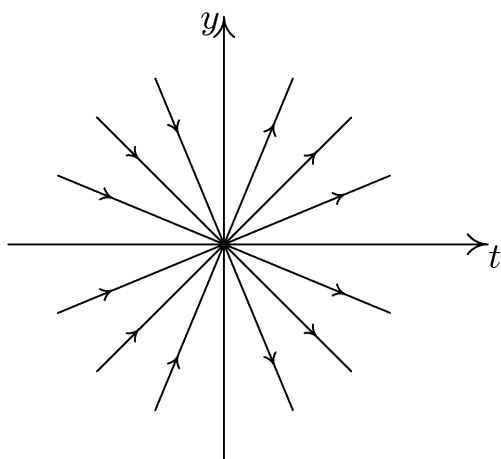


Рис. 3.11. Интегральные кривые ДУ  $y' = y/t$

**Пример 3.7.** Рассмотрим уравнение динамики банковского вклада при переменной процентной ставке  $r(t)$ :

$$S' = r(t)S, \quad S(t_0) = S_0.$$

Полагая

$$R(t) = \int_{t_0}^t r(s)ds ,$$

по формуле (3.24) получим решение начальной задачи в виде

$$S(t) = S_0 \exp(R(t)) .$$

Если решить это равенство относительно  $S_0$  , то получим

$$S_0 = S(t) \exp(-R(t)) .$$

В экономике этот показатель носит название *текущей дисконтированной стоимости первоначально инвестированной суммы*  $S_0$  и позволяет оценивать ее через будущую наращенную сумму вклада (через  $t$  ед. времени).

(3) Обратимся теперь к общему линейному уравнению (3.18). Решение этого неоднородного уравнения можно найти *методом вариации произвольной постоянной*. Замысел метода состоит в том, что искомое общее решение ищется в виде

$$y(t) = C(t)e^{A(t)} , \quad \text{где } A(t) = \int a(t)dt. \quad (3.25)$$

По структуре оно совпадает с решением соответствующего однородного уравнения (см. (3.23)), но теперь  $C$  считается не постоянной, а *гладкой функцией времени* (напомним, что гладкими называют непрерывно дифференцируемые функции). Задача состоит в выборе  $C(t)$  таким образом, чтобы функция (3.25) действительно была общим решением уравнения (3.18).

Для этого подставим ее в уравнение (3.18). Получим:

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)}a(t) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t)$$

или, после сокращения подобных и разрешения относительно производной  $C'(t)$ ,

$$C'(t) = e^{-A(t)}b(t).$$

Получили простейшее ДУ для нахождения  $C(t)$ ; его общее решение находится интегрированием:

$$C(t) = \int e^{-A(t)}b(t)dt + C_1 ,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Подставив  $C(t)$  в равенство (3.25), получим *общее решение неоднородного уравнения* (3.18):

$$y(t) = e^{A(t)} \left[ \int e^{-A(t)} b(t) dt + C_1 \right]. \quad (3.26)$$

Полученную формулу необязательно помнить: практически проще повторять изложенный ход решения по схеме: 1) нахождение общего решения однородного уравнения; 2) варьирование постоянной интегрирования.

**Пример 3.8.** Решим линейное неоднородное уравнение

$$y' = -y \cos t + e^{-\sin t}.$$

Здесь  $a(t) = -\cos t$ ,  $b(t) = \exp(-\sin t)$  – гладкие функции на всей числовой прямой. Следовательно,  $A(t) = -\sin t$ .

Решая соответствующее однородное уравнение

$$y' = -y \cos t,$$

получим  $y(t) = C \exp(-\sin t)$ . Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y(t) = C(t) \exp(-\sin t).$$

Дифференцируем его и подставляем в уравнение:

$$C'(t) e^{-\sin t} - C(t) \cos t \cdot e^{-\sin t} = -C(t) e^{-\sin t} \cos t + e^{-\sin t}.$$

Отсюда получаем, что

$$C'(t) = 1 \Rightarrow C(t) = t + C_1.$$

Следовательно,

$$y(t) = (t + C_1) e^{-\sin t}$$

– общее решение исходного уравнения.

**Пример 3.9.** Найдем общее решение задачи Коши

$$y' = 2ty + 1, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Сначала находим общее решение данного ДУ. Здесь  $a(t) = 2t$ ,  $A(t) = t^2$  и общее решение однородного уравнения таково:

$$y = C e^{t^2}.$$

Варьируя теперь постоянную (т. е. считая ее функцией  $t$ ) и подставляя в исходное ДУ, получим уравнение

$$C' = e^{-t^2},$$

откуда

$$C(t) = \int e^{-t^2} dt + C_1. \quad (3.27)$$

Но последний интеграл “не берется” в элементарных функциях и мы сталкиваемся с затруднением: с одной стороны, общее решение исходного ДУ можно записать, согласно теории, в виде

$$y = \Phi(t, C_1) = \left( \int e^{-t^2} dt + C_1 \right) e^{t^2}$$

и считать, в принципе, задачу интегрирования ДУ исчерпанной (общее решение представлено через элементарные функции и интегралы от них); но, с другой стороны, как решить начальную задачу, если функция справа неизвестна?

Затруднение преодолевается, если использовать определенный интеграл при нахождении первообразных и/или приближенные вычисления.

Действительно, решение (3.27) однородного уравнения можно записать по формуле Барроу

$$C(t) = \int_0^t e^{-s^2} ds + C_1$$

и, соответственно, получить общее решение исходного ДУ в виде

$$y = \Phi(t, C_1) = \left( \int_0^t e^{-s^2} ds + C_1 \right) e^{t^2}.$$

Используя начальные данные  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = -1/2$ , найдем подходящее значение  $C_1 = -1/2$  и решение задачи Коши:

$$y(t) = \left( \int_0^t e^{-s^2} ds - \frac{1}{2} \right) e^{t^2}. \quad (3.28)$$

Для каждого *фиксированного*  $t$  определенный интеграл в этой формуле может быть вычислен на компьютере стандартными методами численного интегрирования. Повторив эти вычисления для достаточно представительного числа значений  $t$  из интересующего интервала  $I$ , можно

получить таблицу значений искомого решения  $y(t)$ , т. е. приближенное решение начальной задачи.

В данном примере ситуация упрощается, поскольку так называемая *функция ошибки*

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$$

является стандартной и затабулирована, а решение (3.28) можно выразить через нее. Существуют и специальные методы численного решения ДУ, вообще не использующие аналитических решений в какой-либо форме.

(4) Из формулы общего решения (3.26) нетрудно получить *решение задачи Коши*  $y(t_0) = y_0$  для ДУ (3.18), которое при  $t \in I$  дается формулой

$$\begin{cases} y(t) = e^{A(t)} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right], \\ \text{где } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds \quad (t_0 \in I). \end{cases} \quad (3.29)$$

(Проведите соответствующее рассуждение). Однако мы убедимся в этом непосредственной проверкой.

Выполнение начального условия очевидно: при  $t = t_0$  все интегралы в (3.29) зануляются, а  $e^0 = 1$ .

Далее, найдем производную функции (3.29). С учетом теоремы Барроу получим:

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{A(t)} A'(t) \left[ y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right] + e^{A(t)} e^{-A(t)} b(t) = \\ &= a(t) y(t) + b(t). \end{aligned}$$

Следовательно,  $y(t)$  удовлетворяет уравнению (3.18) и является решением задачи Коши.

Мы показали, что решение начальной задачи для линейного ДУ (3.18) *существует*. Убедимся, что это решение *единственно*.

Допустим, что на интервале  $I$  имеются каких-либо два решения  $y(t)$  и  $\bar{y}(t)$  задачи Коши. Рассмотрим их разность  $x(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ . Тогда

$$x'(t) = y'(t) - \bar{y}'(t) = a(t)y(t) + b(t) - a(t)\bar{y}(t) - b(t) = a(t)x(t),$$

т. е.  $x(t)$  удовлетворяет однородному уравнению  $x'(t) = a(t)x$  с нулевым начальным условием:

$$x(t_0) = y(t_0) - \bar{y}(t_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Следовательно,  $x(t) \equiv 0$  на  $I$ , т. е. решения  $y(t)$  и  $\bar{y}(t)$  совпадают.  $\square$

Тем самым, нами установлена важная теорема *существования и единственности решения линейного ДУ 1-го порядка*.

**Теорема 3.1.** Пусть функции  $a(t)$ ,  $b(t)$  непрерывны на интервале  $I$ . Тогда при любых  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  решение начальной задачи

$$y' = a(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

существует, единственно на  $I$  и дается формулой (3.29).

Обсудим эту теорему.

Во-первых, она гарантирует существование и единственность *глобального решения* задачи Коши, определенного на *любом* интервале непрерывности коэффициентов (в частности, на всей временной оси, если  $I = \mathbb{R}$ ). Это свойство обусловлено исключительно линейностью и резко контрастирует со случаем нелинейных ДУ: мы уже видели в п. 3.1, что решение нелинейного уравнения может уходить на бесконечность за конечное время, т. е. не существовать глобально (даже при сколь угодно гладкой правой части  $f$ ).

Во-вторых, теорема дает явную формулу для решения начальной задачи при *любых* коэффициентах  $a(t)$ ,  $b(t)$  и начальных данных  $(t_0, y_0)$ . Этим мы тоже обязаны линейности.

### 3.2.4. Уравнения Бернулли и Риккати

Некоторые нелинейные ДУ могут быть сведены к линейным с помощью удачной *подстановки* — перехода к новой неизвестной функции. Мы остановимся лишь на двух типах таких ДУ.

Сначала рассмотрим *уравнение Бернулли*

$$y' = a(t)y + b(t)y^n, \quad \text{где } n \neq 0, n \neq 1$$



и  $a(t)$ ,  $b(t)$  - непрерывные функции на некотором интервале времени  $I$ . Оно сводится к линейному ДУ подстановкой

$$x = y^{1-n},$$

из которой дифференцированием получается уравнение для функции  $x(t)$  :

$$\begin{aligned} x' &= (1-n)y^{-n}y' = (1-n)y^{-n}[a(t)y + b(t)y^n] = \\ &= (1-n)a(t)x + (1-n)b(t), \end{aligned}$$

т.е.

$$x' = (1-n)a(t)x + (1-n)b(t).$$

Если решение  $x(t)$  этого линейного уравнения найдено, то решение уравнения Бернулли получается обратной заменой

$$y(t) = [x(t)]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Заметим, что уравнение Бернулли имеет еще и тривиальное решение  $y \equiv 0$ .

**Пример 3.10.** Решим уравнение Бернулли

$$y' + 2y = e^t y^2.$$

Его решения, отличные от  $y \equiv 0$ , находим подстановкой  $x = y^{1-2} = 1/y$ . Тогда

$$x' = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}(e^t y^2 - 2y) = -e^t + 2x,$$

т.е.  $x' = 2x - e^t$ . Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$x = e^t + C e^{2t}$$

и обратной заменой получаем все нетривиальные решения исходного уравнения:

$$y = (e^t + C e^{2t})^{-1}. \quad \square$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение *Риккати*

$$y' = a(t)y + b(t)y^2 + c(t)$$

(квадратичное относительно неизвестной функции). В общем случае это уравнение не решается в квадратурах. Если известно одно частное его

решение  $y = y_1(t)$ , то подстановкой  $x = y - y_1$  уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли (проверьте). При  $c(t) \equiv 0$  оно является частным случаем уравнения Бернулли ( $n = 2$ ); кроме того, подстановка  $x = 1/y$  приводит его к линейному дифференциальному уравнению относительно функции  $x(t)$ :

$$x' + a(t)x + b(t) = 0.$$

Отметим, что ДУ “взрыва” из примера 3.2 и логистическое уравнение (см. п. 1.3) являются частными случаями уравнения Риккати.

### 3.2.5. ДУ с разделяющимися переменными

Так называются ДУ  $y' = f(t, y)$ , правую часть которых можно представить в виде произведения или частного двух функций, зависящих от разных аргументов (одна от  $t$ , другая – от  $y$ ).

Мы предположим, для определенности, что  $f$  имеет вид частного

$$f(t, y) = \frac{p(t)}{q(y)},$$

где функция  $p(t)$  непрерывна на некотором интервале  $(a, b)$ , а  $q(y)$  – на интервале  $(c, d)$ , где она не обращается в нуль:

$$q(y) \neq 0 \quad \text{на} \quad (c, d). \quad (3.30)$$

Т. о., мы рассматриваем нелинейное ДУ

$$y' = \frac{p(t)}{q(y)},$$

или – в другой форме –

$$q(y) y' = p(t). \quad (3.31)$$

(1) Мнемоническое (т. е. удобное для запоминания) правило решения уравнения (3.31) состоит в следующем.

Заменим в нем производную  $y'$  ее обозначением через дифференциалы переменных и перепишем уравнение в виде

$$q(y) \frac{dy}{dt} = p(t).$$

Рассматривая левую и правую части этого равенства как дроби и обращаясь с дифференциалами  $dy, dt$  как с конечными величинами, оставим все выражения с  $y$  в одной части, а с  $t$  - в другой. Это *разделение переменных* приводит к уравнению в дифференциалах

$$q(y)dy = p(t)dt.$$

Интегрируя левую часть по  $y$ , а правую по  $t$ , получим

$$Q(y) = P(t) + C, \quad (3.32)$$

где

$$Q(y) = \int q(y)dy, \quad P(t) = \int p(t)dt, \quad (3.33)$$

– любые первообразные функций  $q, p$  на интервалах  $(c, d)$  и  $(a, b)$  соответственно, а  $C$  – произвольная постоянная.

Равенство (3.32) неявно задает общее решение ДУ (3.31); чтобы найти его в явном виде, нужно после взятия интегралов (3.33) выразить из уравнения (3.32)  $y$  как функцию  $t$  и  $C$  в виде  $y = \varphi(t, C)$ .

Обоснованию метода предположим несколько примеров.

**Пример 3.11.** Решим уравнение

$$3y^2y' = 2t(y^3 + 1).$$

Переменные в нем разделяются и уравнение преобразуется к следующему

$$\frac{3y^2dy}{y^3 + 1} = 2tdt \quad \text{при } y \neq -1.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln |y^3 + 1| = t^2 + C, \quad y \neq -1.$$

Общее решение получено в неявном виде. Его можно получить явно отдельно в полуплоскостях  $y < -1$  и  $y > -1$ :

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{\exp(t^2 + C) - 1}, & \text{если } y > -1, \\ \sqrt[3]{-\exp(t^2 + C) - 1}, & \text{если } y < -1. \end{cases}$$

Заметим, что еще одно *особое* решение  $y \equiv -1$  нельзя получить из этого равенства.

Выделим решение с начальным условием

$$y(0) = 0 > -1.$$

Для нахождения  $C$  получаем уравнение  $e^C - 1 = 0$ , откуда  $C = 0$  и решение начальной задачи таково:

$$y = \sqrt[3]{\exp(t^2) - 1}.$$

**Пример 3.12.** Рассмотрим простое нелинейное уравнение

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y \neq 0.$$

Здесь  $p(t) = -t$ ,  $q(y) = y$  и  $q \neq 0$  на интервалах  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ . Перепишем уравнение в виде

$$y \frac{dy}{dt} = -t$$

и разделим переменные:

$$y \, dy = -t \, dt.$$

Отсюда интегрированием получаем

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} t^2 + C,$$

или, что равносильно,

$$y^2 = -t^2 + C.$$

Здесь постоянная  $C > 0$  поскольку

$$y^2 + t^2 = C \quad \text{и} \quad y \neq 0.$$

Поэтому удобно положить  $C = c^2$  где  $c > 0$  и переписать результат интегрирования в виде

$$y^2 = c^2 - t^2, \quad y \neq 0.$$

Такова неявная формула для решений данного ДУ.

Полученное квадратное уравнение относительно  $y$  задает несколько неявных функций. Вот некоторые из них вместе с интервалами определения:

$$\begin{aligned}
y = \varphi_1(t, c) &= \sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (-c, c), \\
y = \varphi_2(t, c) &= -\sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (-c, c), \\
y = \varphi_3(t, c) &= \begin{cases} \sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (-c, 0] \\ -\sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (0, c), \end{cases} \\
y = \varphi_4(t, c) &= \begin{cases} -\sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (-c, -c/2] \\ \sqrt{c^2 - t^2}, & t \in (-c/2, c/2) \\ -\sqrt{c^2 - t^2}, & t \in [c/2, c). \end{cases}
\end{aligned}$$

Графики этих функций изображены на рис.3.12. Однако лишь первые две из них действительно являются общими решениями ДУ на интервале  $(-c, c)$  :  $\varphi_1$  в полуплоскости  $y > 0$  , а  $\varphi_2$  – в полуплоскости  $y < 0$ . Функции  $\varphi_3, \varphi_4$  разрывны и не могут быть решениями ДУ.

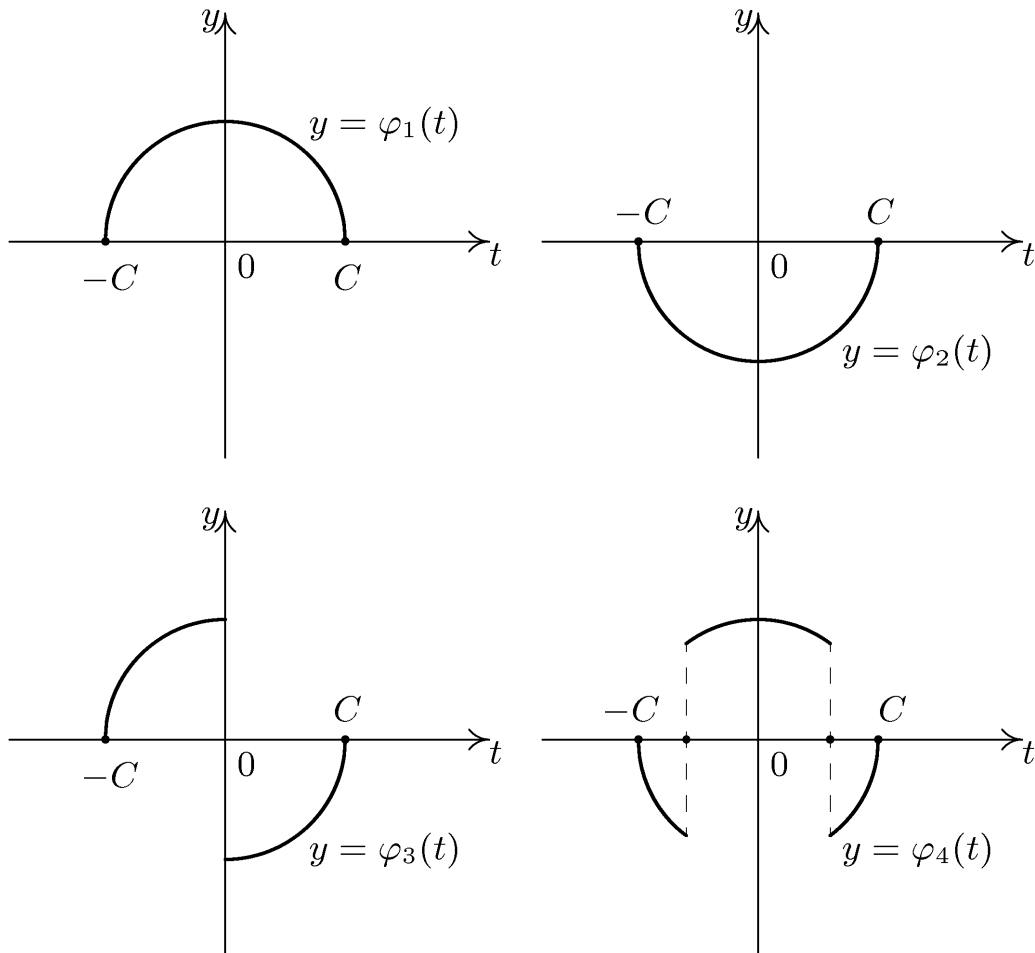


Рис. 3.12

Чтобы найти решение с начальными данными, нужно выбрать, какой из функций –  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$  – необходимо воспользоваться. Например, возьмем начальное условие

$$y(0) = 3 > 0.$$

Тогда следует использовать  $\varphi_1$ . Из равенства  $3 = \sqrt{c^2}$  находим подходящее  $c = 3$  и решение задачи Коши  $y = \sqrt{9 - t^2}$ .

**Пример 3.13.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$t\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - t^2}y' = 0.$$

Ясно, что оно имеет смысл при  $t \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$ . Разрешим его относительно  $y'$

$$y' = -\frac{t\sqrt{1 - y^2}}{y\sqrt{1 - t^2}}.$$

Видно, что это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, причем значения  $t = \pm 1$  и  $y = 0$  необходимо исключить. Разделение переменных дает уравнение

$$\frac{y \, dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\frac{t \, dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

и это требует исключения значений  $t = \pm 1$ . Значит, метод “работает” при

$$t \in (-1, 1) \text{ и } y \in (-1, 0) \text{ или } y \in (0, 1).$$

Интегрируя, получаем решение в неявном виде:

$$\sqrt{1 - y^2} = -\sqrt{1 - t^2} + C, \tag{3.34}$$

где  $C > 0$ . Переход к явному решению требует анализа отдельных случаев и его можно опустить ввиду громоздкости.

Заметим, что функции

$$y \equiv 1, t \in (-1, 1) \text{ и } y \equiv -1, t \in (-1, 1)$$

также удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению, но их нельзя получить из формулы (3.34) ни при каких  $C$ . Следовательно, это особые решения данного дифференциального уравнения.

Рассмотренные примеры показывают, что при решении нелинейных дифференциальных уравнений необходимо внимательно следить за областями определения функций, входящих в данное дифференциальное уравнение, и условиями корректности применяемого метода (в данном случае — это условие (3.30)).  $\square$

(2) Займемся теперь обоснованием метода разделения переменных.

С этой целью фиксируем произвольные значения  $t \in (a, b)$  и  $y_0 \in (c, d)$  и возьмем в качестве первообразных  $Q, P$  в (3.33) функции

$$Q(y) = \int_{y_0}^y q(x)dx, \quad P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds.$$

Тогда равенство (3.32) можно переписать в виде

$$\int_{y_0}^y q(x)dx - \int_{t_0}^t p(s) ds - C = 0.$$

Левая часть этого равенства представляет собой функцию аргументов  $t, y, C$ , которую обозначим через  $F(t, y, C)$ . Тогда (3.34) — это уравнение вида

$$F(t, y, C) = 0,$$

которое должно неявно задавать общее решение  $y = \varphi(t, C)$  дифференциального уравнения (3.31).

Убедимся, что *локально* — в окрестности точки  $(t_0, y_0, C = 0)$  — дело обстоит именно так. Для этого воспользуемся теоремой о неявной функции.

а) Во-первых, при  $t = t_0, y = y_0, C = 0$  равенство (3.34) выполняется. Во-вторых, функция  $F$  является гладкой в силу теоремы Барроу. Кроме того, частная производная

$$F'_y(t_0, y_0, C) = q(y)|_{y=y_0} = q(y_0) \neq 0$$

в силу предположения (3.30). Тем самым, все условия теоремы о неявной функции выполнены и, следовательно, в некоторой окрестности  $O$  точки  $(t = t_0, C = 0)$  существует единственная гладкая функция

$$y = \varphi(t, C), \tag{3.35}$$

удовлетворяющая равенствам

$$F(t, \varphi(t, C), C) = 0, \quad (t, C) \in O, \quad (3.36)$$

$$\varphi(t_0, 0) = y_0. \quad (3.37)$$

б) Проверим, что при любом фиксированном  $C$  (достаточно малом по модулю) функция (3.35) является решением дифференциального уравнения (3.31). Для этого продифференцируем по  $t$  равенство (3.36) с учетом определения функции  $F$ . Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$F_t'(t, \varphi(t, C), C) + F_y'(t, \varphi(t, C), C) \frac{d\varphi(t, C)}{dt} = 0,$$

или, что то же,

$$q(\varphi(t, C)) \frac{d\varphi(t, C)}{dt} = p(t).$$

Это означает, что  $\varphi$  — решение дифференциального уравнения (3.31).  $\square$

Из приведенного рассуждения и равенства (3.37) следует, что решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения задается равенством (3.34) при  $C = 0$ . Т.е., с геометрической точки зрения через каждую точку  $(t_0, y_0)$  прямоугольника

$$a < t < b, \quad c < y < d$$

проходит интегральная кривая дифференциального уравнения (3.31). Более того, можно показать, что она единственна при выполнении условия (3.30); примеры 3.11, 3.13 показывают, что его нарушение может привести к появлению особых решений и неединственности.

Другие типы ДУ описаны в задачах 3.36 – 3.40, 3.56 – 3.61 вместе с методами их решения.

## Задачи

3.21. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений и решение с указанными начальными условиями:

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| а) $y' = y, \quad y(0) = 1;$                   | б) $y' + 3y = 12, \quad y(0) = 10;$ |
| в) $2y' + \frac{1}{2}y = 12, \quad y(0) = 10;$ | г) $y' = 5, \quad y(0) = 1;$        |
| д) $y' = 6y - 6, \quad y(0) = 3;$              | е) $y' + 2y = 4, \quad y(0) = 3.$   |



3.22. Найти общее решение каждого дифференциального уравнения и получить из него решение с начальным условием  $y(1) = 1$ :

- а)  $y' = 5 - y$ ;      б)  $y' = t - y$ ;  
в)  $y' = y - t^2$ ;      г)  $ty' + (1 - t)y = e^{2t}$ ;  
д)  $y' = y^3/t^3$ ;      е)  $y' = t^3/y^3$ .

3.23. Найти общее решение каждого линейного дифференциального уравнения на указанном интервале времени:

- а)  $y' = -y/t + \sin t$ ,  $t > 0$ ;  
б)  $t^2 y' + 3ty = (\sin t)/t$ ,  $t < 0$ ;  
в)  $ty' + 2y = e^t$ ,  $t > 0$ ;  
г)  $y' + (\operatorname{tg} t)y = t \sin 2t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

3.24. Найти решение с заданным начальным условием и указать интервал его существования:

- а)  $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ;  
б)  $ty' + y = e^t$ ,  $y(1) = 1$ ;  
в)  $ty' + 2y = \sin t$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ ;  
г)  $y' + (\operatorname{ctg} t)y = 4 \sin t$ ,  $y(-\pi/2) = 0$ ;  
д)  $t(2 + t)y' + 2(1 + t)y = 1 + 3t^2$ ,  $y(-1) = 1$ ;  
е)  $y' + y = 1/(1 + t^2)$ ,  $y(0) = 0$ .

3.25. В каждом из следующих линейных дифференциальных уравнений есть коэффициент, разрывный в точке  $t = 0$ . Решить уравнения при  $t > 0$  и исследовать поведение решений при  $t \rightarrow 0$  для различных значений постоянной интегрирования. Сделать набросок нескольких интегральных кривых.

- а)  $y' + 2y/t = 1/t^2$ ;      б)  $y' - y/t = t$ ;  
в)  $y' - y/t = t^{1/2}$ ;      г)  $y' + y/t = (\cos t)/t$ .

3.26. Построить семейство интегральных кривых для дифференциального уравнения из примера 3.9.

3.27. а) Показать, что решение задачи Коши

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = y_0$$

имеет вид

$$y = e^{t^2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(t) + y_0 \right]$$

(см. пример 3.9).

б) Построить семейство интегральных кривых.

3.28. Решить уравнения Бернулли:

а)  $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0$ ;

б)  $y' = ry - ky^2$  (логистическое уравнение);

в)  $y' = ay - by^3$ ,  $a, b > 0$ .

3.29. Решить уравнения и указать области определения решений. В случае затруднений предъявляйте решения в неявной форме.

а)  $y' = t^2/y$ ;

б)  $y' = t^2/[y(1+t^3)]$ ;

в)  $y' + y^2 \sin t = 0$ ;

г)  $y' = 1 + t + y^2 + ty^2$ ;

д)  $y' = (\cos^2 t)(\cos^2 2y)$ ;

е)  $ty' = (1 - y^2)^{1/2}$ ;

ж)  $\frac{dy}{dt} = \frac{t - e^{-t}}{y + e^y}$ ;

з)  $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1 + y^2}$ .

3.30. Найти решение задач Коши и указать интервал его определения (хотя бы приближенно).

а)  $(\sin 2t)dt + (\cos 3y)dy = 0$ ,  $y(\pi/2) = \pi/3$ ;

б)  $t dt + ye^{-t} dy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ;

в)  $\frac{dx}{dt} = \frac{r^2}{t}$ ,  $x(1) = 2$ ;

г)  $y' = 2t/(y + t^2 y)$ ,  $y(0) = -2$ ;

д)  $y' = ty^3(1+t^2)^{-1/2}$ ,  $y(0) = 1$ ;

е)  $y' = 2t/(1+2y)$ ,  $y(2) = 0$ ;

ж)  $y' = t(t^2 + 1)/4y^3$ ,  $y(0) = -1/\sqrt{2}$ .

3.31. Найти решение начальной задачи

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

и указать интервал его существования.

*Указание.* При определении интервала существования обратить внимание на точки, в которых  $dt/dy = 0$ .

3.32. Решить уравнение

$$y^2(1 - t^2)^{1/2}dy = (\sin t)^{-1}dt$$

на интервале  $-1 < t < 1$ .

3.33. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \frac{at + b}{ct + d},$$

где  $a, b, c, d$  – константы.

3.34. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

где  $a, b, c, d$  – константы.

3.35. Убедиться, что в уравнении

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y - 4t}{t - y},$$

переменные не разделяются, но подстановка  $x = y/t$  приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными  $x, t$ .

3.36. *Однородные уравнения.* Так называют дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right),$$

в которых правая часть зависит от отношения  $y/t$ .

а) Считая, что функция  $f(x)$  непрерывна на некотором интервале  $(a, b)$ , убедитесь, что однородное уравнение имеет смысл на открытом множестве точек плоскости  $(t, y)$ , границу которого образуют прямые  $y = at$  и  $y = bt$ .

б) Покажите, что подстановка  $x = y/t$  приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

в) Обратите внимание, что дифференциальное уравнение, полученное указанной в б) подстановкой, может иметь постоянные решения вида  $x = \bar{x} = \text{const}$ , где  $\bar{x}$  — корень уравнения  $f(x) = x$ . Какие решения исходного дифференциального уравнения им соответствуют?

3.37. Убедиться, что следующие дифференциальные уравнения являются однородными и найти их решения:

а)  $y' = \frac{t+y}{t}$  ;

б)  $y' = 2ydt - tdy$  ;

в)  $y' = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2}$  ;

г)  $y' = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}$  ;

д)  $y' = \frac{4y - 3t}{2t - y}$  ;

е)  $y' = -\frac{4t + 3y}{2t + y}$  ;

ж)  $y' = \frac{t + 3y}{t - y}$  ;

з)  $(t^2 + 3ty + y^2)dt - t^2dy = 0$  .

3.38. а) Найти решение уравнения

$$y' = \frac{2y - t}{2t - y} .$$

б) Найти решение уравнения

$$y' = \frac{2y - t + 5}{2t - y - 4} .$$

*Указание.* Дифференциальное уравнение из б) приводится к ДУ из а) заменой переменных  $(t, y)$  на  $(\tau, x)$  по формулам  $t = \tau - a$ ,  $x = y - b$ , где постоянные  $a, b$  подбираются так, чтобы преобразованное уравнение было однородным.

Решить описанным в указании способом дифференциальные уравнения

в<sub>1</sub>)  $y' = -\frac{4t + 3y + 15}{2t + y + 7}$  ;

в<sub>2</sub>)  $y' = \frac{t + 3y - 5}{t - y - 1}$  .

3.39. Показать, что уравнение  $y' = f(t, y)$  сводится к однородному, если функция  $f$  удовлетворяет свойству

$$f(t, \alpha t) = f(1, t),$$

где  $\alpha$  — действительный параметр.

Используя этот факт, определите, какие из следующих дифференциальных уравнений сводятся к однородному:

$$\text{а) } y' = \frac{t^3 + ty + y^3}{t^2y + ty^2} ; \quad \text{б) } y' = \ln t - \ln y + \frac{t + y}{t - y} ;$$

$$\text{в) } y' = \frac{(t^2 + 3ty + 4y^2)^{1/2}}{t + 2y} ; \quad \text{г) } y' = \frac{\sin ty}{t^2 + y^2} .$$

3.40 *Уравнения в полных дифференциалах.* Дифференциальное уравнение  $y' = f(t, y)$ , в котором правая часть представима в виде

$$f(t, y) = -\frac{P(t, y)}{Q(t, y)}$$

можно записать в дифференциалах

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0 .$$

Оно называется уравнением в полных дифференциалах или, кратко, *точным*, если его левая часть является *полным дифференциалом*. Это означает, что найдется такая гладкая функция  $F(t, y)$ , что  $F'_t \equiv P(t, y)$ ,  $F'_y \equiv Q(t, y)$ . Такая функция называется *потенциалом* данного уравнения или *дифференциальной формы*  $\omega = Pdt + Qdy$  (для нее  $dF \equiv \omega$ ).

а) Пусть  $P, Q$  — гладкие функции на *открытом* множестве  $D$  плоскости  $(t, y)$ . Показать, что для существования потенциала на множестве  $D$  необходимо выполнение *условия точности* (условия интегрируемости)

$$P'_y = Q'_t \quad \text{на } D$$

(“накрест взятые” производные  $P$  и  $Q$  должны быть равны).

*Указание.* Использовать теорему Янга о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.

б) Показать, что любое решение  $y(t)$  уравнения в полных дифференциалах удовлетворяет равенству

$$F(t, y(t)) = C$$

при некоторой постоянной  $C$ . Т.о., функция  $F$  оказывается постоянной вдоль всех решений данного ДУ. Функции с таким свойством называют *первым интегралом* уравнения (и, следовательно, потенциал есть первый интеграл).

в) Вывести из б), что общее решение уравнения в полных дифференциалах задается неявно уравнением

$$F(t, y) = C ,$$

где  $C$  произвольная постоянная.

г) Пусть выполнено условие точности. Проверить, что следующий алгоритм дает фактический способ нахождения потенциала:

**Шаг 1.** Находим общий вид функций, удовлетворяющих равенству  $F_t'(t, y) = P(t, y)$ :

$$F(t, y) = \int P(t, y) dt + \varphi(y) ,$$

где  $\varphi(y)$  — произвольная гладкая функция (при интегрировании по  $t$   $y$  считается константой);

**Шаг 2.** Подбираем  $\varphi(y)$  так, чтобы выполнялось равенство  $F_y'(t, y) = Q(t, y)$ , т.е.

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dt .$$

Правая часть в этом равенстве не будет зависеть от  $t$  в силу условия точности (проверьте). Поэтому  $\varphi$  легко находится интегрированием по  $y$  правой части.<sup>3</sup>

**Шаг 3.** Найденную  $\varphi$  подставляем в  $F$  из шага 1 и получаем потенциал (первый интеграл)

$$F(t, y) = \int P(t, y) dt + \int \left[ Q(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(t, y) dt \right] dy. \square$$

---

<sup>3</sup>Все рассуждения, как обычно, ведутся на некотором открытом множестве  $D$  области определения данного дифференциального уравнения. Но в этом месте открытости не достаточно: надо считать  $D$  выпуклым множеством, или, более общо, *односвязным*. Односвязное множество содержит все точки, лежащие внутри любой несамопересекающейся кривой из  $D$  с совпадающими концами (такое множество не имеет "дыр"). Дело в том, что из условия " $g_t(t, y) \equiv$  на  $D$  и  $g$  - гладкая функция" не следует, что  $g$  не зависит от  $t$  на  $D$  (!), если  $D$  не односвязно. Если  $D$  выпукло, или односвязно, то условие потенциальности *достаточно* для существования потенциала.

В задачах (3.41) – (3.52) определить, являются ли уравнения точными (см. задачу 3.40), и, в случае положительного ответа, найти решения.

$$3.41. (2t + 3) + (2y - 2)y' = 0$$

$$3.42. (3t^2 - 2ty + 2)dt + (6y^2 - t^2 + 3)dy = 0$$

$$3.43. (2ty^2 + 2y) + (2t^2y + 2t)y' = 0$$

$$3.44. (2t + 4y) + (2t - 2y)y' = 0$$

$$3.45. \frac{dy}{dt} = -\frac{at + by}{bt + cy}$$

$$3.46. \frac{dy}{dt} = -\frac{at - by}{bt - cy}$$

$$3.47. (e^t \sin y - 2y \sin t)dt + (e^t \cos y + 2 \cos t) dy = 0$$

$$3.48. (e^t \sin y + 3y)dt - (3t - e^t \sin y) dy = 0$$

$$3.49. (ye^{ty} \cos 2t - 2te^{ty} \sin 2t + 2t)dt + (te^{ty} \cos 2t - 3)dy = 0$$

$$3.50. (y/t + 6t) dt + (\ln t - 2) dy = 0, \quad t > 0$$

$$3.51. (t \ln y + ty) dt + (y \ln t + ty) dy = 0, \quad t, y > 0$$

$$3.52. \frac{tdt}{(t^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(t^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

3.53. Показать, что дифференциальное уравнение

$$\frac{x}{t} + [\ln(tx) + 1] x' = 0, \quad t, x > 0$$

является точным, найти общее решение и начертить несколько интегральных кривых.

3.54. Решить задачу Коши и определить (хотя бы приближенно) область определения решения:

$$а) (2t - y)dt + (2y - t)dy = 0, \quad y(1) = 3;$$

$$б) (3t^2 + y + 1)dt - (4y - t)dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

3.55. Найти значения параметра  $a$ , при которых следующие уравнения являются точными, и затем решить их с найденным значением  $a$ :

$$а) (ty^2 + at^2y)dt + (t + y)t^2 dy = 0;$$

$$б) (ye^{2ty} + t)dt + ate^{2ty} dy = 0.$$

3.56. *Интегрирующий множитель.* Если дифференциальное уравнение  $Pdt + Qdy = 0$  не является точным, то можно попытаться найти такую гладкую функцию  $m(t, y) \neq 0$ , что “домноженное” уравнение

$$m(t, y) \times [P(t, y)dt + Q(t, y)dy] = 0$$

станет точным. Такая функция, если она существует, называется *интегрирующим множителем* исходного дифференциального уравнения. В силу условия  $m(t, y) \neq 0$ , решения “домноженного” уравнения являются и решениями исходного дифференциального уравнения.

а) Показать, что  $m(t, y) = (ty^2)^{-1}$  является интегрирующим множителем уравнения

$$(y^2 + ty)dt + t^2dy = 0$$

и найти его решение.

б) Показать, что условие точности для “домноженного” уравнения сводится к равенству

$$P m'_y - Q m'_t + (P_y - Q_t) m = 0.$$

Оно представляет собой *дифференциальное уравнение в частных производных для нахождения функции  $m(t, y)$* . Решать такое уравнение ничуть не проще исходного. Поэтому практически интегрирующий множитель находят подбором, или используют частные приемы, описанные ниже в задачах 3.57, 3.58, 3.60, 3.61.

3.57. Если уравнение  $Pdt + Qdy = 0$  допускает существование интегрирующего множителя, зависящего только от  $t$ , или только от  $y$ , то он находится довольно просто.

а) Показать, что зависящий только от  $t$  интегрирующий множитель  $m(t)$  должен удовлетворять уравнению

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P'_y - Q'_t}{Q} m.$$

Так как левая часть зависит только от  $t$  то и *множитель при  $m$  справа должен зависеть только от  $t$* . При выполнении этого условия точности для нахождения  $m(t)$  получаем линейное дифференциальное уравнение.

б) Показать, что дифференциальное уравнение

$$(3ty + y^2) + (t^2 + ty) \frac{dy}{dt} = 0$$



имеет интегрирующий множитель  $m(t)$ , т.е. выполнено условие точности, приведенное в а). Найти множитель и решить ДУ.

в) Получить условие существования интегрирующего множителя, зависящего только от  $y$ .

3.58. а) Показать, что линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = ay + b(t)$$

допускает интегрирующий множитель  $e^{-at}$ .

б) Используя а), найти решение начальной задачи

$$y' = -2y + e^{-t}, \quad y(0) = \frac{3}{4}.$$

в) Показать, что общее линейное дифференциальное уравнение

$$y' = a(t)y + b(t)$$

допускает интегрирующий множитель

$$m(t) = \exp\left(-\int a(t)dt\right).$$

г) Используя метод задачи в), решить уравнения:

$$\Gamma_1) \quad y' = 2y + t^2 e^{2t}; \quad \Gamma_2) \quad y' = -\frac{1}{t}y + 3 \cos 2t, \quad t > 0.$$

3.59. Показать, что следующие нелинейные уравнения не являются точными, но имеют указанный интегрирующий множитель. Решить уравнения.

а)  $t^2 y^3 + t(1 + y^2)y' = 0, \quad m(t, y) = 1/ty^3;$

б)  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-t} \sin t\right) dt + \left(\frac{\cos y + 2e^{-t} \cos t}{t}\right) dy = 0, \quad m(t, y) = e^t y;$

в)  $y dt + (2t - ye^y)dy = 0, \quad m(t, y) = y;$

г)  $(t + 2) \sin y dt + t \cos y dy = 0, \quad m(t, y) = te^t.$

3.60. Показать, что если  $M = (Q'_t - P'_y)/Q$  зависит только от  $y$  то дифференциальное уравнение  $P + Qy'$  имеет интегрирующий множитель

$$m(y) = \exp \left( \int M(y) dy \right).$$

3.61. Показать, что если

$$R = (Q'_t - P'_y)/(tP - yQ)$$

зависит только от произведения  $ty$ , то дифференциальное уравнение  $P + Qy' = 0$  имеет интегрирующий множитель  $m(ty)$  (зависящий от произведения  $ty$ ). Найти формулу для нахождения этого множителя.

3.62. Найти интегрирующий множитель и решить следующие уравнения:

а)  $(3t^2y + 2ty + y^3)dt + (t^2 + y^2)dy = 0;$

б)  $y' = 2e^{2t} + y - 1;$

в)  $dt + (t/y - \sin y)dy = 0;$

г)  $ydt + (2ty - e^{-2y})dy = 0;$

д)  $e^t dt + (e^t ctg t + 2y \operatorname{cosec} y)dy = 0;$

е)  $[4(t^3/y^2) + (3/y)] dt + [3(t/y^2) + 4y] dy = 0;$

ж)  $\left( 3t + \frac{6}{y} \right) + \left( \frac{t^2}{y} + 3 \frac{y}{t} \right) \frac{dy}{dt} = 0.$

*Указание.* См. задачу 3.61.

3.63. Используя интегрирующий множитель

$$m(t, y) = [ty(2t + y)]^{-1},$$

решить уравнение

$$(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0.$$

Проверить, что полученное решение совпадает с тем, что получено в задаче 3.57 б) с другим интегрирующим множителем.

### 3.3. Динамика финансового актива

В этом пункте мы рассмотрим модели, связанные с накоплением финансового актива, доходность которого характеризуется переменной процентной ставкой  $r(t)$ , начисляемой непрерывно. Если такой актив, будучи однажды приобретен, в дальнейшем не подвергается инвестированию или реинвестированию, то его динамика описывается линейным однородным ДУ  $S' = r(t)S$ , которое рассмотрено в примере 3.7. Здесь мы возьмем за основу модель бюджетного ограничения потребителя (пример 1.3), которая предполагает возможность использования актива на текущее потребление  $c(t)$ , что приводит к линейному неоднородному ДУ

$$S'(t) = r(t)S - c(t). \quad (3.38)$$

(1) *Автономный случай.* Рассмотрим сначала простейший случай, когда процентная ставка и стратегия потребления постоянны:

$$r(t) = r = \text{const}, \quad c(t) = c = \text{const} > 0. \quad (3.39)$$

В этом случае уравнение (3.38) становится автономным и имеет одну точку равновесия  $S^* = c/r$ . Как видно из фазового портрета, она неустойчива: актив неограниченно растет при  $S > S^*$  и убывает при  $S < S^*$ .



Последнее означает, что если инвестор склонен к “сибаритству” и будет расходовать вклад со скоростью  $c >$  текущего процентного дохода  $rS$  то актив неминуемо будет промотан: в некоторый момент  $T$  окажется, что  $S(T) = 0$  и вклад будет ликвидирован. Чтобы это случилось, достаточно выбрать потребление  $c > rS_0$ , где  $S_0$  - начальный вклад.

Аналитическое решение модели с начальным условием  $S(0) = S_0$  можно получить с использованием точки равновесия методом п. 3.2.3 (1), который приводит к формуле

$$S(t) = S^* + (S_0 - S^*)e^{rt}, \quad t > 0. \quad (3.40)$$

Она подтверждает сделанные качественные выводы и, в частности, позволяет явно найти время полного проматывания актива сибаритом. (Найдите его.)

(2) *Переменная стратегия управления активом, и кусочно гладкие решения.* Пусть теперь вместо жесткой постоянной стратегии потребления инвестор выбирает изменяющуюся во времени стратегию  $c(t)$ , которая допускает не только потребление, но инвестирование в какие-то промежутки времени (т. е.  $c(t)$  может принимать значения  $< 0$ ).

В этой ситуации уравнение становится неавтономным, и мы сталкиваемся с некоторыми особенностями; они заставляют *расширить понятие решения ДУ* и отказаться от его гладкости. Связано это со свойствами возможных стратегий как функций времени.

Действительно, допустим, что инвестор выбрал *кусочно постоянную* стратегию управления активами:

$$c(t) = \begin{cases} c_1, & t \in [0, t_1] \\ c_2, & t > t_1, \end{cases} \quad (3.41)$$

где  $t_1 > 0$  – некоторый момент времени, а  $c_1, c_2$  различные постоянные (скажем,  $c_1 > 0$ , что соответствует потреблению актива, а  $c_2 < 0$ , т. е. при  $t > t_1$  происходит инвестирование).

Формально методы п. 3.2.3 и теорема 3.1 не применимы, поскольку они предполагают непрерывность по времени всех коэффициентов линейного ДУ, а функция (3.41) разрывна при  $t = t_1$ . Но в данном случае затруднение легко преодолевается.

Во-первых, вспомним, что кусочно непрерывные функции можно интегрировать, разбивая промежуток интегрирования на отрезки непрерывности и суммируя интегралы по ним. Поэтому все формулы п. 3.2.3 имеют смысл при кусочно непрерывных коэффициентах  $a(t), b(t)$ . В частности, это относится и к формуле (3.29), дающей решение задачи Коши для линейного ДУ. Правда, теперь уже  $y(t)$  будет не гладкой, а *кусочно гладкой* функцией времени: она будет непрерывна при всех  $t$ , непрерывно дифференцируемой на каждом интервале непрерывности функций  $a(t), b(t)$ , но в точках разрыва  $a(t)$  или  $b(t)$  производной  $y'(t)$  не будет существовать.

Чтобы охватить важные для приложений модели с разрывными коэффициентами, естественно рассматривать *кусочно гладкие* решения ДУ, удовлетворяющие ему всюду, кроме точек разрыва производной (моментов разрыва коэффициентов уравнения). С геометрической точки зрения интегральные кривые кусочно гладких решений будут иметь угло-

вые точки, соответствующие моментам времени, в которых производная решения не существует.

Во-вторых, находить кусочно гладкие решения можно путем последовательного интегрирования линейного ДУ на промежутках непрерывности коэффициентов с непрерывной стыковкой в точках разрыва коэффициентов.

В рассматриваемом случае разрывной стратегии (3.41) мы должны сначала найти решение на отрезке  $[0, t_1]$ , интегрируя уравнение

$$S' = rS - c_1$$

с заданным начальным условием  $S(0) = S_0$ . Это автономное ДУ имеет решение

$$S(t) = \frac{c_1}{r} + \left( S_0 - \frac{c_1}{r} \right) e^{rt}, \quad t \in [0, t_1], \quad (3.42)$$

которое получается аналогично случаю (3.40). Тем самым, траектория на отрезке  $[0, t_1]$  найдена и, в частности, известно значение

$$S(t_1) = S_1 = \frac{c_1}{r} + \left( S_0 - \frac{c_1}{r} \right) e^{rt_1}. \quad (3.43)$$

Для непрерывной стыковки принимаем его за начальное условие для следующего промежутка непрерывности  $t \geq t_1$  и решаем на нем уравнение

$$S' = rS - c_2. \quad (3.44)$$

Это дает нам следующий кусок траектории

$$S(t) = \frac{c_2}{r} + \left( S_1 - \frac{c_2}{r} \right) e^{r(t-t_1)}, \quad t \geq t_1. \quad (3.45)$$

Вместе с равенствами (3.42), (3.43) эта формула описывает кусочно гладкое при всех  $t \geq 0$  решение данного уравнения, соответствующее стратегии (3.41).

Допустим для определенности, что обладатель актива решил сначала "промотать" половину начального актива с постоянной скоростью  $c_1 > 0$ , а затем поддерживать актив на постоянном уровне ( $= S_0/2$ ). Пользуясь найденным решением, можно найти соответствующий момент  $t_1$  окончания периода "сибаритства", а также скорость инвестирования  $c_2$  при  $t \geq t_1$ . Так как в данном случае  $S(t_1)$  должно равняться  $S_1 = S_0/2$  то формула (3.43) принимает вид

$$\frac{S_0}{2} = \frac{c_1}{r} + \left( S_0 - \frac{c_1}{r} \right) e^{rt_1}.$$

Отсюда путем преобразования и логарифмирования найдем искомый момент  $t_1$ :

$$t_1 = \frac{1}{r} \ln \frac{rS_0 - 2c_1}{2(rS_0 - c_1)} .$$

Скорость инвестирования  $c_2$  найдем из условия постоянства актива при  $t \geq t_1$ : функция  $S(t) \equiv S_0/2$  должна удовлетворять ДУ (3.44), что дает равенство

$$0 = r \frac{S_0}{2} - c_2 .$$

Отсюда получаем  $c_2 = rS_0/2$ .

**(3) Общий неавтономный случай и дисконтирование.** Вернемся теперь к общему уравнению актива (3.38), считая  $r(t)$  и  $c(t)$  заданными кусочно непрерывными функциями времени на полупрямой  $t > 0$ . Тогда, в соответствии с формулой (3.29), кусочно гладкое решение с начальным условием  $S(0) = S_0$  запишется в виде

$$S(t) = e^{R(t)} \left[ S_0 - \int_0^t e^{-R(s)} c(s) ds \right] , \quad (3.46)$$

где

$$R(t) = \int_0^t r(s) ds .$$

Т. о., будущая стоимость актива меняется под влиянием ставки процента и стратегии его использования.

Разрешая равенство (3.46) относительно  $S_0$ , получим формулу

$$S_0 = e^{-R(t)} S(t) + \int_0^t e^{-R(s)} c(s) ds .$$

Она устанавливает связь между текущей ценой актива  $S_0$ , его будущей стоимостью и суммарным потреблением актива (при  $c(t) \geq 0$ ). При этом стоимость будущего актива и поток потребления дисконтируются рыночной ставкой процента: отдаленные во времени актив и потребление оцениваются ниже ближайших.

**(4) Уравнение арбитража.** Рассмотрим инвестора, который решает вопрос о приобретении актива, дающего право на периодически получаемый или купонный доход  $C(t)$  (размерность - деньги в единицу времени), а также доход от прироста актива. Пусть  $V(t)$  - стоимость предполагаемого актива. Инвестор вложит средства в приобретение актива, если

суммарная стоимость от инвестиций, т. е. купонный доход и прирост стоимости актива, будет по крайней мере не меньше, чем доход, гарантированный надежным коммерческим банком со ставкой процента  $r$ . За достаточно малый отрезок времени  $\Delta t$  денежный депозит в банке принесет инвестору доход в  $rV(t)\Delta t$  ден. ед., а доход от актива составит

$$C(t)\Delta t + (V(t + \Delta t) - V(t)).$$

Сформулированное условие инвестирования можно записать в виде неравенства

$$rV(t)\Delta t \leq C(t)\Delta t + (V(t + \Delta t) - V(t)). \quad (3.47)$$

Однако на развитом (эффективном) финансовом рынке строгое неравенство здесь невозможно по крайней мере в течение достаточно длительного времени, поскольку тогда возможен *арбитраж* - получение дополнительного дохода за счет простого перераспределения средств. Действительно, при неравенстве " $<$ " инвесторам будет выгодно занимать деньги в банке и вкладывать в данный актив, зарабатывая на несовершенстве рынка. Увеличение заявок на займы заставит банк поднять процент, а увеличение покупок повысит его цену, сократив доходность. Можно полагать, что эти процессы будут происходить до тех пор, пока в (3.47) восстановится равенство - своеобразное рыночное равновесие.

Если теперь в (3.47) заменить знак неравенства на равенство, поделить на  $\Delta t$  и перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то получим *дифференциальное уравнение арбитража*

$$rV(t) = C(t) + \frac{dV(t)}{dt}. \quad (3.48)$$

Оно отражает условие отсутствия арбитражной прибыли и играет важную роль в теории эффективных финансовых рынков.

Решение уравнения арбитража с начальным условием  $V(0) = V_0$  описывается формулой, вполне аналогичной (3.46). Это решение *в прямом времени* - от  $t = 0$  в сторону возрастания  $t$  или, так сказать, "впередсмотрящее" решение. Однако, для многих экономических процессов естественно считать известным не начальное условие, а конечное - значение решения в некоторый момент  $T > 0$ . Например, стоимость актива в будущий момент  $T$  может быть оговорена условиями контракта как нарицательная стоимость долга (сумма, взятая в займы, вместе с процентами).

В этом случае решение уравнения (3.48) ищется в обратном времени – от  $t = T$  к  $t = 0$  с *конечным граничным условием*

$$V(T) = V_T . \quad (3.49)$$

Это "назадсмотрящее" решение можно получить обычным методом вариации произвольной постоянной, выбрав постоянную интегрирования так, чтобы выполнилось конечное условие (3.49). Но можно свести конечную задачу к начальной путем *обращения времени* – введения новой независимой переменной  $\tau = T - t$ . Когда  $t$  убывает от  $T$  до 0,  $\tau$  возрастает от 0 до  $T$ ; для функции

$$x(\tau) = V(T - \tau)$$

получаем ДУ

$$\frac{dx}{d\tau} = -rx + c(\tau), \quad \text{где } c(\tau) = C(T - \tau), \quad (3.50)$$

и начальное условие

$$x(0) = V(T) = V_T . \quad (3.51)$$

(Заметим, что обращение времени соответствует простой смене знака в ДУ; сравните (3.50) с (3.48).) Задача (3.50), (3.51) имеет решение

$$x(\tau) = e^{-r\tau} \left[ V_T + \int_0^\tau e^{\tau s} c(s) ds \right] .$$

Из него, обратной заменой

$$V(t) = x(T - t), \quad \tau = T - t,$$

получаем решение конечной задачи (3.48), (3.49):

$$V(t) = e^{r(t-T)} \left[ V_T - \int_T^t e^{r(T-s)} C(s) ds \right] . \quad (3.52)$$

(Проверьте.)

Решение (3.52) показывает, что рыночная стоимость долга представляет собой дисконтированную нарицательную стоимость долга, скорректированную на величину дисконтированной стоимости купонных выплат.



## Задачи

**3.64.** Начальная сумма  $S_0$  вложена на банковский депозит по годовой сложной ставке  $r\%$ , начисляемой непрерывно.

а) Найти время  $T$  (как функцию ставки  $r$ ), необходимое для удвоения вклада.

б) Конкретизировать  $T$ , если  $r = 7\%$ .

в) Найти процентную ставку, при которой первоначальная сумма удваивается за 8 лет.

**3.65.** Студент, не имеющий начального капитала, инвестирует  $v$  руб. ежегодно на банковский вклад по ставке  $r\%$ . Предположим, что вложения и начисления процентов производятся непрерывно.

а) Определить наращенную сумму  $S(t)$  для любого момента времени  $t$ .

б) Если  $r = 7,5\%$ , то какими должны быть ежегодные инвестиции  $v$ , чтобы через 40 лет получить 1 млн. рублей процентных денег?

в) Если  $v = 2000$  руб., то какой должна быть ставка  $r$ , чтобы через 40 лет получить 1 млн. рублей дохода?

**3.66.** Найти наращенную сумму за 20 лет для каждой из следующих стратегий инвестирования, если годовая сложная ставка составляет  $8\%$  и начисляется непрерывно.

а) Ничего первоначально, а затем 1500 руб. ежегодно в течение 20 лет.

б) 10000 руб. первоначально и далее по 1000 руб. ежегодно в течение 20 лет.

в) 20000 руб. первоначально и далее по 500 руб. ежегодно в течение 20 лет.

г) 30000 руб. первоначально и ничего более в течение 20 лет.

д) 5000 руб. первоначально, затем по 500 руб. в течение 10 лет и по 2000 руб. в последующие 10 лет.

Заметьте, что в каждом случае суммарные инвестиции составляют 30000 руб. (а срок накопления 20 лет).

**3.67.** Пенсионер использует свой банковский вклад для текущего потребления, снимая с него ежегодно  $s$  рублей. Ставка по вкладу равна  $r$  и начисляется непрерывно; предположим, что и реинвестирование на текущее потребление происходит непрерывно и равномерно.

а) Определить сумму на вкладе  $S(t)$ , если первоначально она составляла  $S_0$  руб.

б) При заданных  $S_0$  и  $r$  найти потребление  $\bar{c}$ , при котором сумма вклада остается постоянной.

в) Если текущее потребление  $\bar{c}$  превосходит уровень, найденный в б), то сумма вклада будет уменьшаться и неизбежно исчерпается. Найти момент времени  $T$ , в который  $S(T) = 0$ .

г) Вычислить  $T$  (см. (в)), если  $r = 8\%$ , а  $s = 2\bar{c}$ .

д) Допустим, что вкладчик рассчитывает использовать вклад не более  $T$  лет. Какой может быть максимальная норма потребления  $s$ ?

е) Какой должна быть начальная сумма вклада, чтобы его можно было использовать  $T$  лет при норме потребления 12000 и ставке  $8\%$ ?

**3.68.** Рассмотрим несколько стратегий инвестиций в банковский вклад, рассчитанный на 40 лет. Для каждой из стратегий найти накопленную сумму  $S(40)$  и отношение  $S(40)/I$ , где  $I$  - общая сумма инвестиций.

а)  $S_0 = 3000$  руб.,  $v = 1200$  руб./в год.,  $r = 8\%$  в течение первых 20 лет и  $10\%$  для оставшихся 20 лет.

б)  $S_0 = 3000$  руб.,  $r = 8\%$ ,  $v = 1200$  руб./в год в течение первых 20 лет и  $v = 1800$  руб./в год в следующие 20 лет.

в)  $S_0 = 3000$  руб.,  $r = 8\%$ ,  $v = 1200$  руб./в год в течение первых 20 лет; в следующие 20 лет  $v = 1800$  руб./в год,  $r = 10\%$ .

## 3.4. Логистическое уравнение и связанные с ним модели

### 3.4.1. Исследование свойств решений

Рассмотрим логистическое уравнение

$$y' = ay - by^2, \quad a, b > 0. \quad (3.53)$$

О его многочисленных приложениях в экологии, социологии, экономике уже говорилось в п. 1.3; поэтому оно заслуживает отдельного изучения.

Напомним, что уравнение (3.53) моделирует динамику показателя состояния некоторого процесса в предположении, что темп изменения показателя есть убывающая линейная функция:

$$\frac{y'}{y} = a - by.$$

(1) Исследуем качественные свойства решений и интегральных кривых уравнения с помощью фазового портрета и анализа самого уравнения.

Это уравнение автономно и имеет две точки равновесия  $\bar{y} = 0$  и  $y^* = a/b > 0$ . Из рис.3.13 видно, что точка  $\bar{y} = 0$  асимптотически неустойчива, а  $y^*$  устойчива. Кроме того, для построения интегральных кривых сразу отмечаем, что все решения возрастают по  $t$  при  $y \in (0, y^*)$  и убывают при  $y < 0$  и  $y > y^*$ . На расширенной фазовой плоскости  $(t, y)$  этим диапазонам изменения  $y$  соответствуют горизонтальные полосы возрастания и убывания решений по времени.

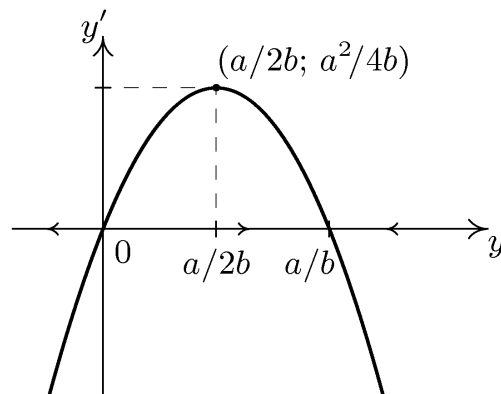


Рис. 3.13. Фазовый портрет дифференциального уравнения (3.53)

Теперь исследуем интегральные кривые на выпуклость. Для этого нам необходимо выяснить знак второй производной  $y''$  решений в различных областях плоскости  $(t, y)$ . Это можно сделать, продифференцировав обе части ДУ (3.53) сложным образом по  $t$ . Будем иметь:

$$y'' = (a - 2by)y' = (a - 2by)(ay - by^2) = a^2y \left(1 - \frac{2b}{a}y\right) \left(1 - \frac{b}{a}y\right).$$

Выпуклость или вогнутость интегральных кривых определяется знаком правой части этого равенства. Для наглядности вновь удобно использовать фазовую плоскость с выделенными на ней интервалами постоянства знака  $y''$ , как показано на рис. 3.14. Попутно эта диаграмма даст информацию о множестве точек перегиба интегральных кривых — они совпадают с точками, при переходе через которые  $y''$  меняет знак. В данном случае диаграмма показывает, что интегральные кривые выпуклы на интервалах  $y \in (0, a/2b)$ ,  $y > a/b$  и вогнуты при  $y < 0$  и  $y \in (a/2b, a/b)$ . На плоскости  $(t, y)$  этим интервалам соответствует ещё одна серия горизонтальных полос выпуклости и вогнутости.

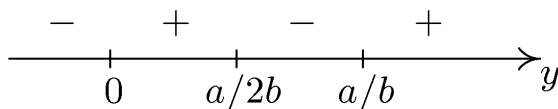


Рис. 3.14. Диаграмма знаков  $y''$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: в автономном уравнении полосы монотонности и полосы выпуклости определяются только переменной состояния  $y$  и не зависят от времени. Именно поэтому все они оказываются горизонтальными. Если вспомнить, что интегральные кривые автономного уравнения инвариантны относительно сдвига по времени (см. п. 3.1.7), то отмеченное обстоятельство вполне естественно.

Анализ монотонности и выпуклости интегральных кривых любого автономного ДУ выделяет на плоскости  $(t, y)$  всего 4 типа горизонтальных полос с различным поведением траекторий. Их можно представить следующей таблицей вместе с микронаброском качественного вида кривых в каждой из полос:

	$y' = dy/dt$	$y' = d^2y/dt^2$	$y(t)$	Кривая
1	$> 0$ и возрастает	$> 0$	возрастает и выпукла	
2	$> 0$ и убывает	$< 0$	возрастает и вогнута	
3	$< 0$ и возрастает	$> 0$	убывает и выпукла	
4	$< 0$ и убывает	$< 0$	убывает и вогнута	

Вместе с анализом устойчивости точек равновесия полученной информации вполне достаточно для качественного наброска семейства интегральных кривых логистического уравнения (рис.(3.15)). Характерные S-образные кривые, соответствующие начальным условиям  $y(0) = y_0 \in (0, a/2b)$  получили название *логистических*.

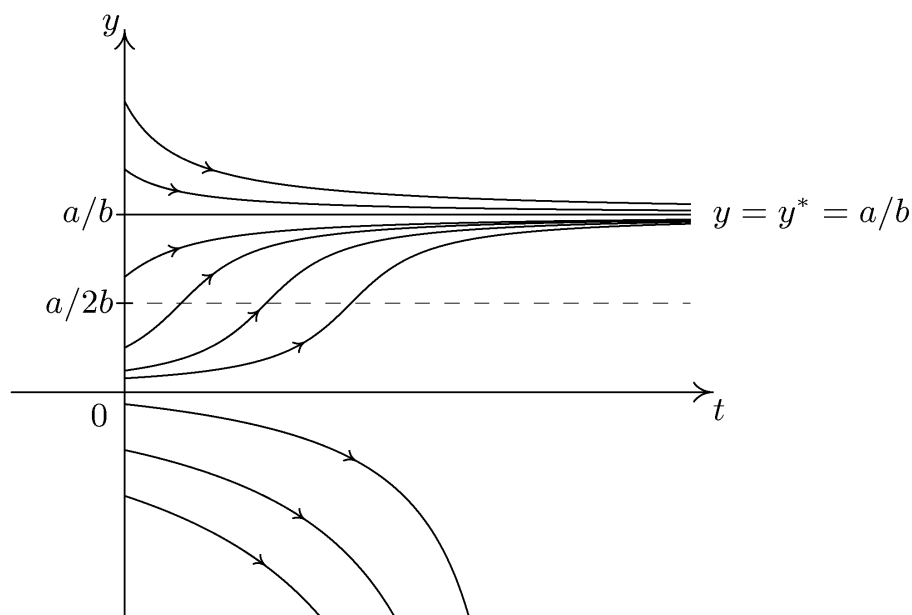


Рис. 3.15. Интегральные кривые логистического уравнения

Т.о., в отличие от дискретного логистического уравнения, решения его непрерывного аналога ведут себя вполне предсказуемо и поддаются анализу элементарными методами.

(2) Решим теперь логистическое уравнение аналитически с начальным условием  $y(0) = y_0 > 0$ . Это можно сделать по-разному: с одной стороны, это ДУ с разделяющимися переменными, поскольку его можно переписать в виде

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{b}{a}y\right)y} = a dt$$

(воспользуйтесь этим и проведите интегрирование); с другой стороны, это уравнение Риккати, которое можно свести к линейному подстановкой

$$x(t) = \frac{1}{y(t)}$$

(см. п. 3.2.3). Мы воспользуемся вторым способом.

Заметим сначала, что если мы ищем решение с начальным состоянием  $y_0 > 0$  то соответствующее решение  $y(t)$  останется положительным (это следует из качественного анализа). Теперь дифференцированием подстановки найдём уравнение для  $x$ :

$$x' = -ax + b \quad \text{причём} \quad x(0) = x_0 = \frac{1}{y_0}.$$

Это автономное линейное уравнение имеет точку равновесия  $x^* = b/a = 1/y^*$  и потому его решение легко найти методом п. 3.2.3 (1):

$$x(t) = x^* + (x_0 - x^*)e^{-at}$$

(конечно, можно воспользоваться и общей формулой (3.29)). Обращая это равенство, находим искомое решение

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right)e^{-at}} = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-at}}. \quad (3.55)$$

Таково явное уравнение интегральных кривых при всех  $y_0 > 0$ . Легко видеть, что при  $t \rightarrow \infty$   $y(t) \rightarrow y^* = a/b$  в полном соответствии с качественным анализом.

Мы вновь наблюдаем разительный контраст с дискретной логистической моделью, решения которой аналитически получить невозможно.

(3) Чтобы дать представление о возможных числовых значениях параметров логистической модели, воспроизведем данные для одной из популяций палтуса в Тихом океане:  $a = 0,71$  (естественный темп прироста

в год),  $y^* = 80,5 \cdot 10^6$  кг.,  $y_0 = 0,25y^*$  (следовательно,  $y(t)$  – это показатель биомассы популяции в килограммах). Исследователей интересовало время  $T$ , через которое популяция достигнет уровня  $0,75y^*$ . Оно оказалось равным  $\approx 3,095$  года.

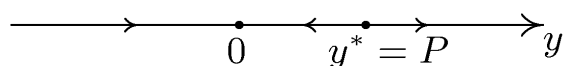
### 3.4.2. Модификации модели

Вернёмся к классической трактовке логистического уравнения как модели динамики численности (или биомассы) биологической популяции. Допустим, что, согласно мнению экологов, моделируемая популяция должна погибать, если только её численность опустится ниже некоторого порогового уровня  $P$ . Тогда логистическое уравнение не годится, поскольку даже при малых  $y$  его решения возрастают.

Попробуем рассмотреть модифицированную модель, которая получается из ДУ (3.53) сменой знака правой части, т.е. испытаем ДУ вида

$$y' = -ay + by^2 = -ay \left(1 - \frac{y}{P}\right), \quad (3.56)$$

где  $a, b > 0$  и введено обозначение  $P = a/b$ . Это уравнение имеет те же точки равновесия  $\bar{y} = 0$  и  $y^* = P$ , что и уравнение (3.53), но фазовый портрет сменился: теперь равновесие  $y^*$  оказалось неустойчивым, а  $\bar{y}$  устойчивым; при этом мы добились желательного порогового эффекта гибели популяции, если она окажется в состоянии  $y < y^* = P$  (хотя полностью вымереть популяция всё же не может).



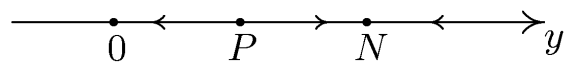
По сути дела, всё, что мы сделали с логистическим уравнением, — это сменили знак параметров  $a, b$ , но это привело к резкой смене качественного поведения решений уравнения. Когда ДУ зависит от параметров и при их изменении картина поведения решений резко меняется, то говорят, что в данном уравнении происходит *бифуркация*. В данном примере бифуркация произошла при переходе параметров  $a, b$  через нулевые значения; эти значения называют *бифуркационными*.

Итак, модель (3.56) описывает пороговый эффект. Однако она имеет серьёзный недостаток: если численность популяции превысит  $y^* = P$ , то она неограниченно возрастает. Этот “мальтузианский” недостаток требует коррекции модели — в естественных условиях численность популяции

должна иметь некоторый уровень стабилизации или насыщения  $N > P$ . Чтобы смоделировать эффект насыщения и избежать неограниченного роста численности, необходимо обеспечить отрицательный знак правой части ДУ при достаточно больших значениях  $y$ . Проще всего этого добиться, добавив в правую часть уравнения (3.56) ещё один множитель  $(1 - y/N)$  т.е. перейти к уравнению

$$y' = -ay \left(1 - \frac{y}{P}\right) \left(1 - \frac{y}{N}\right), \quad N > P. \quad (3.57)$$

При этом появляется ещё одна точка равновесия  $\tilde{y} = N$  а фазовый портрет принимает следующий вид:



Видно, что  $\tilde{y}$  устойчивая точка равновесия, а при  $y > P$  можно ожидать поведения интегральных кривых, подобного логистической модели.

Примечательно, что близкая к (3.57) модель использовалась в США для описания популяции голубей.

### Задачи

**3.69.** Рассмотрим популяцию, динамика которой описывается логистическим уравнением  $dy/dt = ry(1 - y/N)$ .

а) Найти момент времени  $\tau$ , в который численность популяции удвоится по сравнению с начальной  $y_0 = N/3$ . Конкретизировать решение для годового коэффициента роста  $r = 0,025$ .

б) Обозначим  $\alpha = y_0/N$ . Найти момент времени  $T$ , в который  $y(T)/N = \beta$ , если  $0 < \alpha, \beta < 1$  (т.е. в момент  $T$  численность популяции должна составить долю  $\beta$  от уровня насыщения  $N$ ). Заметьте, что  $T \rightarrow \infty$ , если  $\alpha \rightarrow 0$  или  $\beta \rightarrow 1$ . Найти момент времени  $T$  для  $r = 0,025$ .

**3.70.** Рассмотрим модель динамики популяции, предложенную Гомбетцом

$$\frac{dy}{dt} = ry \ln \frac{y}{N}, \quad r, N > 0.$$

а) Сделать набросок графика зависимости  $dy/dt$  от  $y$ , найти точки равновесия и исследовать их на устойчивость.



б) Исследовать на выпуклость (вогнутость) график  $y(t)$  для значений  $0 \leq y \leq N$ .

в) Показать, что  $dy/dt$  в уравнении Гомбетца не может быть меньше  $dy/dt$  в соответствующем логистическом уравнении, если  $0 \leq y \leq N$ .

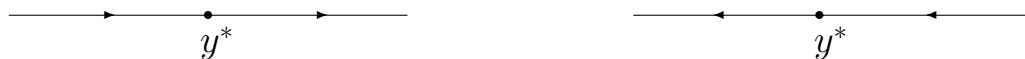
**3.71.** а) Решить уравнение модели Гомбетца с начальным условием  $y(0) = y_0$ .

*Указание:* Используйте замену переменной  $x = \ln(y/N)$ .

б) Вычислить биомассу популяции через 2 года (т.е.  $y(2)$ ), если годовой коэффициент роста  $r = 0,71$ , уровень насыщения  $N = 80,5 \cdot 10^6$  кг и  $x_0/N = 0,25$ .

в) Для исходных данных задачи б) найдите из модели Гомбетца момент  $\tau$ , в который  $y(\tau) = 0,75N$ .

**3.72.** *Полустойчивые точки равновесия.* Иногда встречаются точки равновесия уравнения, которые обладают тем свойством, что решения, лежащие с одной стороны от точки равновесия, сходятся к ней, а с другой – уходят от неё. Такие точки равновесия называют полустойчивыми (иначе – шунтом). Фазовый портрет уравнения имеет в этом случае один из двух следующих видов:



а) Рассмотрите уравнение

$$\frac{dN}{dt} = k(1 - N)^2, \quad \text{где } k > 0.$$

Показать, что  $N^* = 1$  – единственная точка равновесия.

б) Построить график зависимости  $dN/dt$  от  $N$ . Показать, что  $N$  возрастает как при  $N < 1$  так и при  $N > 1$ , так что  $N^* = 1$  – полустойчивая неподвижная точка.

в) Решить данное уравнение с начальным условием  $N(0) = N_0$  и убедиться аналитически в правильности выводов пункта б).

*Рациональная эксплуатация биоресурсов.* Многие биологические ресурсы являются объектом экономической деятельности: ведётся их добыча с целью использования в пищевой промышленности (например, байкальского омуля), в медицине (жир нерпы, медведя), лёгкой промыш-

ленности (мех соболя, белки) и т.д. Модели биологических популяций, учитывающие их добычу, получаются модификацией моделей “естественных” популяций, предоставленных самим себе. Некоторые из таких модификаций содержатся в задачах 3.73 – 3.76. Заметим, что в этих моделях интенсивность добычи (квота вылова) может рассматриваться как управление, нацеленное на рациональное использование биоресурса – оптимизацию процесса добычи. Как станет ясно из решения задач, такие явления, как потеря устойчивости, катастрофы (гибель популяции), возникающие при добыче, делают задачи оптимизации управления весьма актуальными.

**3.73.** Предположим, что динамика рыбной популяции в естественных условиях описывалась логистическим уравнением  $dy/dt = y - y^2$ . Если с некоторого момента начался вылов популяции с постоянной интенсивностью  $v$  (скажем, тонн в год), то уравнение модели примет вид

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - v.$$

а) Показать, что если  $v < 1/4$ , то уравнение имеет две точки равновесия  $y_1, y_2$ ,  $y_1 < y_2$ ; найти эти точки.

б) Показать, что  $y_1$  устойчива, а  $y_2$  неустойчива.

в) Используя график зависимости  $dy/dt$  от  $y$  убедиться, что при  $y_0 > y_1$   $y(t) \rightarrow y_1$  если  $t \rightarrow \infty$ , а при  $y_0 < y_1$   $y(t) \rightarrow 0$  если  $t \rightarrow \infty$  (популяция гибнет). Заметьте, что  $y = 0$  не является точкой равновесия при  $v > 0$  и, следовательно, популяция гибнет за конечное время. (Объясните этот факт).

г) Пусть теперь  $v > 1/4$ . Показать, что биомасса популяции уменьшается до нуля с течением времени при любом начальном значении  $y_0$  (чрезмерно интенсивный промысел).

д) Пусть  $v = 1/4$ . Показать, что в этом случае уравнение имеет единственную точку равновесия  $y^* = 1/2$  и она полуустойчива (см. задачу 3.72).

е) Сделайте набросок семейства интегральных кривых для случаев  $0 < v < 1/4$ ;  $v > 1/4$ ;  $v = 1/4$ .

Таким образом, максимальная квота вылова, которая может поддерживать популяцию в состоянии равновесия, равна  $1/4$  и соответствует ста-

ционарной точке  $y^* = 1/2$ . Заметьте, что, во-первых, в этом состоянии естественный темп прироста популяции максимален и, во-вторых, при переходе управляющего параметра  $v$  через критическое значение  $v = 1/4$  качественное поведение траекторий резко меняется, то есть происходит *бифуркация*.

**3.74.** Потеря устойчивости и гибель популяции, наблюдавшиеся в предыдущей задаче, — довольно частое явление в системах с управлением, если оно назначается не зависящим от состояния системы. Негативных явлений можно избежать, путём введения *управления с обратной связью*  $v(y)$  зависящего от численности популяции.

Возьмём, например, управление, пропорциональное численности:  $v = cv$ , где  $c > 0$  — параметр управления (который можно оптимизировать). Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{dy}{dt} = (1 - c)y - y^2.$$

а) Покажите, что при  $c < 1$  это уравнение имеет две точки равновесия; найдите их и исследуйте на устойчивость.

б) Покажите, что оптимальное значение параметра  $c$ , при котором интенсивность промысла в стационарном состоянии популяции максимальна, равно  $1/2$ . Убедитесь, что при этом  $v = 1/4$ , т.е. совпадает с критическим значением управления в предыдущей задаче. Однако, теперь эта стратегия не ведёт к катастрофе, как при жёстком управлении без обратной связи.

**3.75.** *Катастрофа и бифуркация в логистической модели с управлением.* (См. также две предыдущие задачи). Рассмотрим рыбную популяцию, вылов которой производится с постоянной интенсивностью  $v$  (не зависящей от численности популяции). Предположим, что в естественных условиях динамика популяции хорошо описывалась логистическим уравнением  $dy/dt = ry(1 - y/N)$ . Тогда с учётом промысла это уравнение модифицируется следующим образом:

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/N) - v.$$

а) Показать, что если  $v < rN/4$ , то данное уравнение имеет две точки равновесия  $y_1, y_2$ ,  $y_1 < y_2$ ; найти эти точки.

б) Показать, что  $y_1$  устойчива, а  $y_2$  неустойчива.

в) Используя график зависимости  $dy/dt$  от  $y$  показать, что если начальная численность  $y_0 > y_1$ , то  $y(t) \rightarrow y_2$  при  $t \rightarrow \infty$ , но если  $y_0 < y_1$  то  $y(t)$  убывает с течением времени. Следовательно, при  $y_0 < y_1$  происходит катастрофа — популяция гибнет за конечное время. (Объясните, почему время конечно.)

г) Показать, что если  $v > rN/4$ , то  $y(t)$  уменьшается до нуля с течением времени (гибель при экологически недопустимой интенсивности промысла).

д) Показать, что при  $v = rN/4$  уравнение имеет одну полуустойчивую точку равновесия  $y^* = N/2$ .

Следовательно, при переходе управляющего параметра через значение  $v^* = rN/4$  происходит *бифуркация*, причем максимально возможная квота вылова в равновесном состоянии популяции в точности равна критическому значению управления  $v^* = rN/4$  при стационарной точке  $y^* = N/2$ . Заметьте, что в этой точке естественный прирост популяции (при  $v = 0$ ) максимален.

е) Изобразите качественное поведение интегральных кривых для случаев  $0 < v < v^*$ ;  $v > v^*$ ;  $v = v^*$ .

**3.76.** *Стабилизация системы при управлении с обратной связью.* Потеря устойчивости и катастрофа в предыдущей задаче объясняется жесткой стратегией управления: оно не зависело от состояния популяции. Устойчивость теряться не будет, если ввести *управление с обратной связью*  $v = v(y)$ , зависящее от численности популяции.

а) Покажите это на примере линейного управления  $v = cy$  при котором логистическое уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/N) - cy$$

известный как модель Счефера. Заметим, что при таком управлении интенсивность промысла увеличивается пропорционально численности популяции, а коэффициент пропорциональности становится новым управляющим параметром. Он имеет размерность 1/время и характеризует общие усилия, затрачиваемые на добычу рыбы.

б) Определите, при каком значении управляющего параметра интенсивность добычи в стационарном состоянии максимальна.

в) Как можно модифицировать модели двух предыдущих задач, если за управление принять не интенсивность промысла, а финансовые затраты на вылов в ед. времени?

# Литература

## Основная литература

1. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Научное издание / Д.Эрроусмит, К.Плейс. – М.: ПЛАТОН, 1997. – 243 с.
2. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: Учеб. пособие для вузов / А.П.Карташев, Б.Л.Рождественский. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1986. – 272 с.
3. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник / М.С.Красс. – М.: Инфра – М, 1998. – 464 с.
4. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

## Дополнительная литература

5. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В.В.Лебедев. – М.: Изограф, 1997. – 221 с.
6. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Э.Петерс. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
7. Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А.Самарский, А.П.Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
8. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории: Пер. с англ / В.Б.Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
9. Mathematics for Economics / M.Hoy, J.Livernois, Ch.McKenna et al. – 2-d ed. – The MIT Press, 2001. – 1129 p.
10. Chiang A.C. Fundamental Methods of Mathematical Economics / A.C.Chiang. – 3-d ed. – McGraw - Hill International Editions, 1984. - 788 p.
11. Michel Ph. Cours de Mathematiques pour economistes / Michel Ph. – 2-d ed. – Paris: Economica, 1989. - 747 p.