"Вызовы поляризованного общества:
междисциплинарный подход"

Байкал, Малое море, 24.08.2011

НОВЕЙШИЕ ДОСТИЖЕНИЯ ЭКОНОФИЗИКИ

А.В. Леонидов

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Основные темы

- Макроскопическая динамика финансовых рынков
  (J.P. Bouchaud, J.D. Farmer, ...[2006-2011])

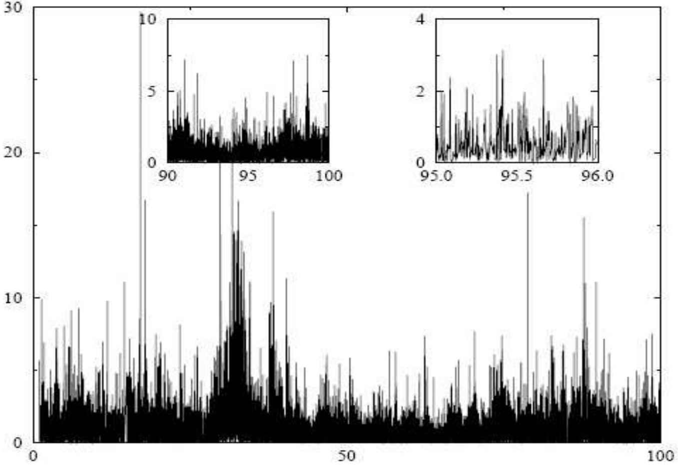
- Описание результатов голосования в терминах
  культурного поля
  (C. Borghesi, J.P. Bouchaud [2010])

Неоклассическая ценовая динамика

- В равновесии в отсутствии новой информации цена остается постоянной и равной фундаментальной цене актива
- При появлении новой информации об активе цена скачком меняется и, после быстрого Вальрасовского переходного процесса, устанавливается на новом фундаментальном уровне.

Реальная ценовая динамика

Волатильность дневной доходности DJI (1900-2000)



- Насколько хорошо известна фундаментальная цена актива?
- Каково сравнительное значение экзогенных (внешняя информация) и эндогенных (институциональный механизм определения цены, поведение агентов, ... , в ценовой динамике?

Фундаментальная цена

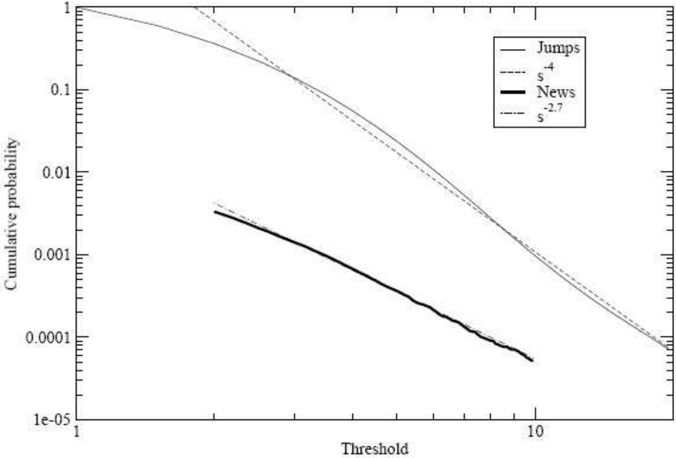
- Неоклассики: в принципе известна точно как равновесное среднее по всем возможным будущим траекториям мира.
- Реалисты (M. Keynes, F. Black) : В лучшем случае с точностью до фактора 2.
- Если правы реалисты, то большая неопределенность фундаментальной цены приводит к наличию больших ее флуктуаций и в промежутках между новостями.

Роль внешней информации

- Рассмотрим величину $|r(t)|/\sigma(t)$, где $|r(t)|$ - доходности на временном горизонте $\Delta T = 1 \mathrm{\ min}$, а $\sigma(t)$ - усредненная 1-минутная волатильность на горизонте $\Delta T = 120 \mathrm{\ min}$.
- Определим s - скачок как событие с $|r(t)| > s\,\sigma(t)$.
- Выделим (с помощью новостной ленты) s - скачки, связанные с новой информацией по данному активу.

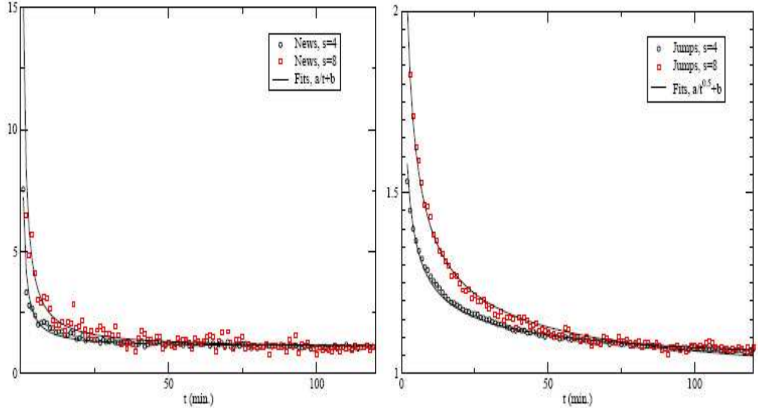
Роль внешней информации

Распределение по числу s - скачков.



Роль внешней информации

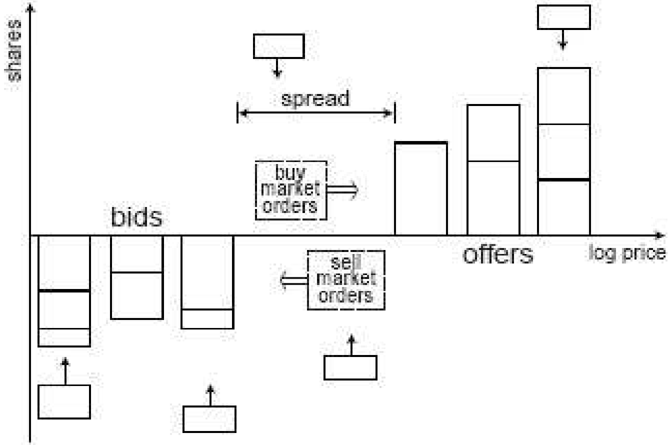
Релаксация s - скачков.



Роль внешней информации

- Флуктуации цены вызваны преимущественно действием эндогенных факторов .
- Релаксация экзогенных (новостных) флуктуаций происходит по закону $1/t$.
- Релаксация эндогенных флуктуаций происходит по закону $1/\sqrt{t}$.

Институциональные рамки: непрерывный двойной аукцион



Институциональные рамки: непрерывный двойной аукцион

Структура спроса/предложения (ликвидность)

- Мгновенный спрос/предложение (market orders) $M_\pm$
- Явный отложенный спрос/предложение: книга заявок (limit orders in the order book) $V_\pm$
- Скрытый отложенный спрос/предложение $\Omega_\pm$

Институциональные рамки: непрерывный двойной аукцион

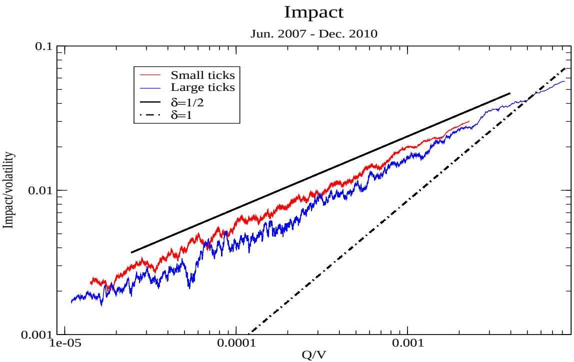
Электронный двойной аукцион работает в режиме

$$V_\pm \ll \Omega_\pm$$

- Характерный масштаб мгновенной явной ликвидности $V_\pm \sim 10^{-3}$ дневного объема.
- Покупка (продажа) 1% акций компании требует порядка 10^3 сделок.

Market impact: исполнение метазаявки

- Рассмотрим изменение цены Δp , вызванное исполнением метазаявки объема Q



$$\Delta p(Q) = Y\sigma\sqrt{\frac{Q}{V}},$$

σ, V - дневные волатильность и объем.

Market impact: исполнение метазаявки

- Рассмотрим восприимчивость цены по отношению к объему заявки

$$\chi_Q = \frac{d\Delta p}{dQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{Y\sigma}{\sqrt{V}}\right)\frac{1}{\sqrt{Q}}$$

- Восприимчивость χ сингулярна при $Q \to 0$!

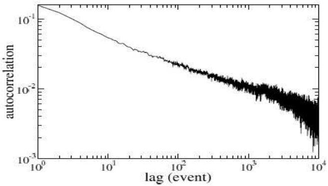
$$\chi_Q\big|_{Q\to 0} \to \infty$$

$$\Updownarrow$$

- Рынок живет в режиме исчезающе малой явной ликвидности и большой латентной ликвидности, т.е. в критическом режиме!

Длинная память покупок/продаж

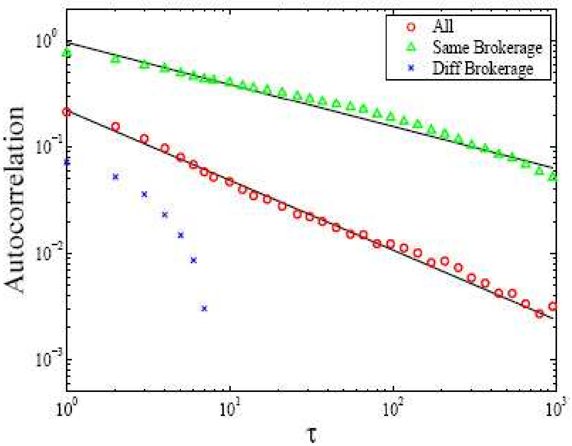
- Припишем каждой сделке знак $\epsilon = \pm 1$, где $\epsilon = +1$ отвечает покупке (realized buy market order), а $\epsilon = -1$ отвечает продаже (realized sell market order)
- Рассмотрим автокорреляционную функцию знаков сделок $C(l) \equiv \langle \epsilon_{n+l} \epsilon_n \rangle_n$



$$C(l) \propto \frac{c_0}{l^\gamma}, \quad \gamma \simeq 0.5 \quad \rightleftarrows \quad \text{Long memory!}$$

Длинная память покупок/продаж

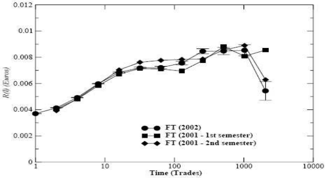
- Коррелированность знаков действительно имеет своим источником действия одного агента (брокерской конторы):



Влияние сделки на последующую эволюцию цены (market impact)

- Рассмотрим корреляционную функцию $R(l)$, характеризующую влияние сделки покупки/продажи на последующую эволюцию цены:

$$R(l) \ = \ \langle (p_{n+l} - p_n) \cdot \epsilon_n \rangle_n$$



$$R(l \to \infty) \quad \sim \quad \text{const.}$$

Влияние сделки на последующую эволюцию цены (market impact)

- Воздействие сделки на одном шаге:

$$\langle p_{n+1} - p_n \rangle_{\epsilon_n = 1} \simeq 0.3\ S_n,$$

  где S_n - спред, предшествующий n -й сделке.
- Корреляционная функция $R(l)$ на самом деле описывает совокупное влияние l сделок. Удобно ввести истинную функцию влияния единичной сделки $G(l)$, так что

$$p_t = p_{-\infty} + \sum_{t=-\infty}^{n-1} G(t - t')\epsilon_{t'} S_{t'}$$

- Тогда

$$R(l) = K \left[G(l) + \sum_{0<n<l} G(l-n)C(n) + \sum_{n>0} [G(l+n) - G(n)]C(n) \right]$$

Влияние сделки на последующую эволюцию цены (market impact)

- Предположим, что влияние единичной сделки убывает степенным образом:

$$G(l \to \infty) \sim \frac{\Gamma_0}{l^{\beta}}$$

- В асимптотике $l \to \infty$ имеем:

$$\begin{aligned}
R(l \to \infty) &\to \infty, \quad \beta > \beta^* \\
R(l \to \infty) &\to R_\infty = \mathrm{const.}, \quad \beta = \beta^* \\
R(l \to \infty) &\to -\infty, \quad \beta, < \beta^*
\end{aligned}$$

где

$$\beta^* = \frac{1}{2}(1 - \gamma)$$

Влияние сделки на последующую эволюцию цены (market impact)

- Рассмотрим дисперсию отклика

$$\sigma^2(l) \; = \; \langle (p_{n+l} - p_n)^2 \rangle_n$$

- В асимптотике $l \to \infty$ вклад в $\sigma^2(l)$, обусловленный корреляциями, имеет вид:

$$\sigma^2(l \to \infty) \sim c_0 \Gamma_0^2 l^{2-2\beta-\gamma}$$

- Отсутствию арбитражных возможностей (эффективному рынку) отвечает зависимость

$$\sigma^2(l \to \infty) \sim l,$$

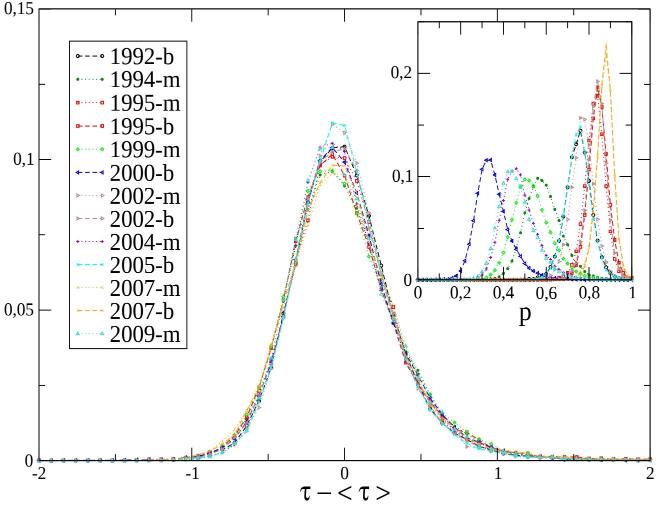
то есть $\beta = \beta^* = (1-\gamma)/2$, т.е. тому же условию, которое обеспечивало правильную асимптотику $R(l)$!

Результаты голосования: феноменология

- Рассматриваются результаты голосования по M коммунам с населением N_α, $\alpha = 1 \cdots M \simeq 36,000$
- Результат индивидуального голосования
  $S_i = 1 \rightleftarrows$ голосование за
  $S_i = 0 \rightleftarrows$ голосование против
- Активность
  - $V_\alpha = \sum_{i=1}^{N_\alpha} S_i, \quad p_\alpha = V_\alpha / N_\alpha$
  - $\tau_\alpha = \ln(V_\alpha / N_\alpha - V_\alpha) = \ln(p_\alpha / 1 - p_\alpha)$

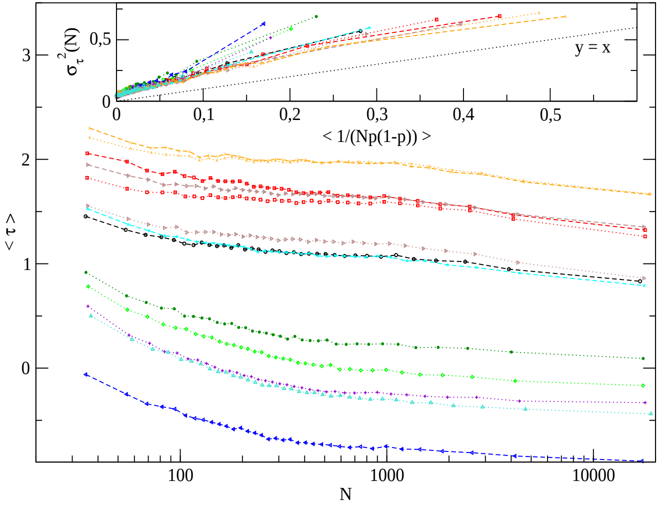
Результаты голосования: феноменология

Распределение по активности $P(\tau - \langle\tau\rangle)$



Результаты голосования: феноменология

Моменты распределения $P(\tau|N)$



Результаты голосования: феноменология

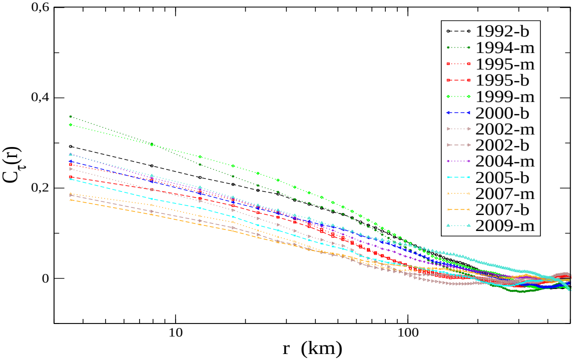
- Географическое положение каждой коммуны α характеризуется двумерным вектором $\mathbf{R}_\alpha$
- Связь результатов голосования в коммунах α и β , разделенных расстоянием $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta|$, характеризуется корреляционной функцией

$$C_\tau(r) = \frac{\langle(\tau_\alpha - m_\alpha)(\tau_\beta - m_\beta)\rangle|_{r_{\alpha\beta}=r}}{\langle(\tau_\alpha - m_\alpha)^2\rangle}$$

- Корреляционная функция вычисляется для коммун, имеющих сходные размеры.

Результаты голосования: феноменология

Корреляционная функция $C_\tau(r)$



$$C_\tau(r) = -\lambda^2 \ln(r/L), \quad 0 < r < L \simeq 300 \text{ km}$$

$$C_\tau(r) = 0, \quad r > L$$

Результаты голосования: феноменология

- Функция $P(\tau - \langle\tau\rangle)$ универсальна.
- Среднее условного распределения $P(\tau|N)$ убывает с ростом N.
- Дисперсия условного распределения $P(\tau|N)$ растет с ростом N , но медленнее, чем для независимого выбора агентов.
- Результаты голосования характеризуются дальними пространственными корреляциями.

Результаты голосования: теория. Мотивация

- Рассмотрим двумерное стохастическое уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \phi(\vec{R}, t)}{\partial t} = D \Delta \phi(\vec{R}, t) + \eta(\vec{R}, t),$$

где $\eta(\vec{R}, t)$ - ланжевеновский белый шум.

- Для одновременного двухточечного коррелятора поля $\phi(\vec{R}, t)$ имеем:

$$C_\phi(r) = \frac{\langle \phi(\vec{r}) \phi(0) \rangle}{\langle \phi(0)^2 \rangle} \approx -\Lambda^2 \ln \frac{r}{L}, \qquad \ell_c \ll r \ll L$$

Результаты голосования: теория.

- Введем поле намерений агента, живущего в окрестности **R** :

$$\varphi_i(t) = \epsilon_i(t) + \phi(\vec{R}, t)$$

  где
  - $\epsilon_i(t)$ - идиосинкратический вклад
  - $\phi(\vec{R}, t)$ - усредненное по недавнему прошлому мнение окружающих

- Правило принятия решения:

$$S_i(t) = \Theta(\varphi_i(t) - \Phi_c)$$

Результаты голосования: теория.

- Локальная эволюция $\phi(\vec{R}_\alpha, t)$

$$\left.\frac{\partial \phi(\vec{R}_\alpha, t)}{\partial t}\right|_{\text{infl.}} = \sum_\beta \Gamma_{\alpha\beta}[\phi(\vec{R}_\beta, t) - \phi(\vec{R}_\alpha, t)]$$

- Общее уравнение в непрерывном пределе:

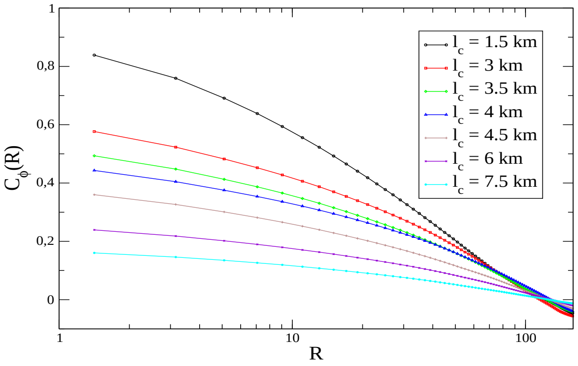
$$\frac{\partial \phi(\vec{R}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [D(\vec{R})\vec{\nabla}\phi(\vec{R}, t)] + \eta(\vec{R}, t) + F(t),$$

где

  - $D(\vec{R}_\alpha) = \frac{1}{2}\sum_\beta r_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\alpha\beta}$
  - $F(t)$ - публичная информация.
  - $\eta(\vec{R}, t)$ - компонента, описывающая локальные флуктуации культурного поля и характеризующаяся пространственной корреляционной длиной l_c и временной корреляционной длиной T_c.

Результаты голосования: теория.

- Модельная корреляционная функция $C_{\varphi}(R)$.
  Используется параметризация $\Gamma(r) \sim \exp(-r/l_c)$



Результаты голосования: теория. Эволюция во времени

- Рассмотрим характерные масштабы межкоммунного взаимодействия $L \sim 10\ \mathrm{km}$ и $T \sim \mathrm{months}$
- Тогда
$$D = \frac{L^2}{T} \sim 10^2\ \mathrm{yr}$$
- Локальная временная эволюция характеризуется корреляционной функцией

$$C_\phi(t) = \frac{\left\langle \phi(\vec{R},t)\phi(\vec{R},0) \right\rangle}{\langle \phi(\vec{R},t)^2 \rangle} \approx -\frac{\Lambda^2}{2} \ln \frac{t}{T_{eq}}$$

Результаты голосования: феноменология

Корреляционная функция $C_\tau(t)$