Институт Проблем Управления РАН

Полное решение задачи Хотеллинга в безопасных стратегиях

М.Б.Искаков

Институт проблем управления РАН, Москва

А.Б.Искаков

Институт проблем управления РАН, Москва

Цель работы:

Исследование модели пространственной конкуренции Хотеллинга при помощи концепции равновесия в безопасных стратегиях, при условии отказа от упрощающих предположений Хотеллинга о неэластичности суммарного спроса и отсутствия ценовых войн.

План работы:

1. Постановка задачи
2. Обзор
3. Равновесие в безопасных стратегиях: определение
4. Безопасные стратегии в ценовой игре задачи Хотеллинга
5. Решение задачи Хоттелинга с неэластичным спросом
6. Условие безопасности от сокращения покупательской зоны
7. Условие безопасности от полного вытеснения с рынка
8. Наилучший безопасный ответ
9. Существование РБС в игре цен с эластичным спросом
10. Типы равновесий в игре цен
11. Исследование игры цен на прямой
12. Аналитическое решение ценовой игры
13. Иллюстрация: численные расчеты решения ценовой игры
14. Пример: повышение цен при переходе от монополии к олигополии
15. Аналитическое решение игры расположений
16. Экономическая интерпретация полученных результатов

Литература

Основные работы по ЗХ:

Harold Hotelling. Stability in competition. Economic Journal, 1929.

C. d'Aspremont, J. Gabszewicz, J.-F. Thisse. On Hotelling's "Stability in competition". Econometrica, 1979.

N.Economides 1986; M. Osborne, C. Pitchik 1987;
T. Tabuchi, J.-F. Thisse 1995; L. Lambertini 1997; S. Brenner 2001;
V. Mazalov, M. Sakaguchi 2003; C. Benassi, A. Chirco 2008 …

Равновесие в безопасных стратегиях:

M. B. Iskakov. Equilibrium in Safe Strategies. Automation and Remote Control, 2005.

M. B. Iskakov. Equilibrium in Safety Strategies and equilibriums in objections and counter objections in noncooperative games. Automation and Remote Control, 2008.

Равновесие в угрозах и контругрозах:

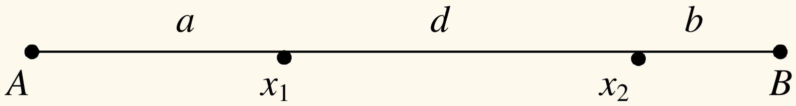
Е. М. Вайсборд, В.И. Жуковский. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения, 1980.

Постановка задачи

Институт Проблем Управления РАН

Постановка задачи

На отрезке $[A\ B]$ длины l расположены 2 игрока-продавца в точках x_1 и x_2, и большое количество равномерно распределенных игроков-покупателей. Рассматривается 3-шаговая игра:



Шаг 1. Продавцы определяют точки своего расположения x_1 и x_2.

Шаг 2. Продавцы определяют цену на свой товар p_1 и p_2.

Шаг 3. Покупатели выбирают продавца, у которого они покупают единицу товара.

Стоимость товара для покупателя складывается из цены на товар и транспортных затрат. Покупатель отказывается от покупки товара, если его полезность при этом становится отрицательной (эластичный спрос). Целевая функция покупателя: $u(x) = \max\{0, 1 - \min\limits_{i \in \{1,2\}}(p_i + |x_i - x|)\}$.

Целевая функция продавца 1: $u_1(a, b, p_1, p_2) = p_1 q_1 = \begin{cases} p_1(v_1 + w_1), & p_1 < p_2 - d \\ p_1(v_1 + r_1), & |p_1 - p_2| \le d \\ 0, & p_1 > p_2 + d \end{cases}$

где $v_1 = a,\ w_1 = d + b,\ r_1 = \dfrac{d + p_2 - p_1}{2}$ (неэластичный спрос).

$v_1 = \min\{a, 1 - p_1\},\ w_1 = \min\{d + b, 1 - p_1\},\ r_1 = \min\left\{\dfrac{d + p_2 - p_1}{2}, 1 - p_1\right\}$ (эластичный спрос);

Условия нормировки: транспортные затраты на единичное расстояние равны 1, полезность единицы товара для покупателя равна 1, плотность покупателей – 1.

Hotelling 1929: Исследовал игру цен при фиксированном расположении игроков, получил формулу локального равновесия (Нэша):

$$p_1^* = l + \frac{a-b}{3}, \quad p_2^* = l + \frac{b-a}{3}.$$

d'Aspremont, Gabszewicz, Thisse 1979: Нашли ограничения, при которых существует равновесие Нэша:

$$\left(l + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{3}{4}(a+2b), \quad \left(l + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{3}{4}(b+2a).$$

Дальнейшие исследования – решение задачи при измененных параметрах модели: вид функции транспортных затрат, наличие эластичности спроса, тип исследуемой игры (игра цен, 2-шаговая игра), порядок входа на рынок (одновременный, последовательный), рассмотрение смешанных стратегий, вид множества на котором расположен рынок, распределение покупателей, количество игроков-продавцов

Обзор полученных ранее результатов: альтернативы

d'Aspremont, Gabszewicz, Thisse 1979: Предложили использовать квадратичные функции транспортных затрат вместо линейных, при которых ценовое равновесие всегда существует.

Economides 1986: Исследовал 2-шаговую задачу с показательной функцией транспортных затрат $x^{\alpha}, 1 \le \alpha \le 2$, нашел условия существования ценовых равновесий.

Osborne, Pitchik 1987: Решали задачу в смешанных стратегиях, ценовая стратегия как распределение цены на интервале, доказано что равновесие всегда существует.

Tabuchi, Thisse 1995: Исследовали 2-шаговую задачу с квадратичными функциями транспортных затрат при не равномерных распределениях покупателей, получены решения для частных случаев распределений покупателей.

Обзор полученных ранее результатов: альтернативы

Lambertini 1997: Рассмотрел равновесия в 2-шаговой игре с одновременным и последовательным принятием решений, квадратичными транспортными затратами и эластичным спросом, показал, что решение существенно зависит от последовательности действий игроков.

Brenner 2001: Исследовал 2-шаговую задачу с более чем двумя игроками, с ограничениями на возможные расположения игроков (симметричные, на одинаковом расстоянии друг от друга расположения), квадратичными транспортными затратами и эластичным спросом, показал, что для трех игроков указанные расположения являются равновесиями, для более чем трех – нет.

Mazalov, Sakaguchi 2003: Решали 2-шаговую задачу с квадратичными и линейными транспортными затратами с покупателями расположенными на круге, найдены равновесия по ценам и расположениям.

Benassi, Chirco 2008: Исследовали 2-шаговую задачу с квадратичными функциями транспортных затрат при не равномерных распределениях покупателей, показано существование несимметричных равновесий при симметричных распределениях покупателей.

- В основу исследования положен отказ от двух упрощающих предположений Хотеллинга: о неэластичности суммарного спроса и отсутствия ценовых войн.

- Эластичность спроса была введена через условие неотрицательности полезности покупателя.

- Ценовые войны моделировались с помощью РБС.

Анонс

Институт Проблем Управления РАН

- Полученное решение показало ряд эффектов с важной экономической интерпретацией:
- демпинговые ценовые равновесия;
- ценовые равновесия с разделом сфер влияния;
- естественная граница между стремлением игроков к дифференциации и концентрации (в частном случае как граница между демпинговыми и обычными ценовыми равновесиями);
- сложная качественная картина перехода решения от точечного рынка до неограниченного (на прямой) в зависимости от ключевого параметра – протяженности рынка;
- эффект повышения цен при переходе от монополии одного продавца к дуополии;
- ценовое равновесие высоких цен на внутреннем ограниченном и защищенном рынке, компенсирующим потерю в ходе конкуренции внешнего рынка.

- Решение получилось весьма громоздким (особенно несимметричные равновесия) , но вполне доступным как аналитическому, так и в особенности численному решению.
- Богатство обнаруженных эффектов открывает перспективу перехода от чисто теоретических моделей к решению прикладных задач моделирования пространственно распределенных рынков.

Равновесие в безопасных стратегиях

Институт Проблем Управления РАН

Определение 1. Угрозой игрока j игроку i $(j \to i)$ называется пара профилей $\{x, (x'_j, x_{-j})\}$ такая что: $u_j(x'_j, x_{-j}) > u_j(x)$ и $u_i(x'_j, x_{-j}) < u_i(x)$. При этом профиль x называется ***содержащим угрозу***, а профиль (x'_j, x_{-j}), также как и стратегия x'_j, называются ***угрожающими*** игроку i со стороны игрока j.

Определение 2. стратегия x_i игрока i называется ***простой безопасной стратегией*** при заданной обстановке x_{-i}, если профиль x не содержит угроз игроку i.

Определение 3. Множеством $W_i(x) \subseteq X_i$ ***простых стратегий, предпочтительных с учетом угроз*** для игрока i относительно профиля x называется множество стратегий x'_i таких, что $u_i(x'_i, x_{-i}) \geq u_i(x)$ и для любого игрока $j \neq i$ и для любой его угрозы игроку i: $\{(x'_i, x_{-i}), (x'_i, x'_j, x_{-ij})\}$ выполнено $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) \geq u_i(x)$.

Определение 4. Профиль x^* называется ***простым равновесием в безопасных стратегиях***, если $\forall i : W_i(x^*) \neq \emptyset$, $\quad x_i^* \in \arg\max\limits_{x_i \in W_i(x^*)} u_i(x_i, x_{-i}^*)$.

Замечание. Все стратегии в равновесии, определенном таким образом, являются безопасными, а множества $W_i(x^*)$ состоят из таких безопасных отклонений, при которых выигрыш игроа i не изменяется. Но, тем не менее, введение множества $W_i(x)$ необходимо, так как при использовании вместо него множества простых безопасных стратегий в число равновесий попадают профили, не обладающие хорошими свойствами (например с минимальными выигрышами для всех).

Definition 1. The threat of player *j* to player *i* is the pair of strategy profiles $\{s,(s'_j,s_{-j})\}$ such that $u_j(s'_j,s_{-j})>u_j(s)$ and $u_i(s'_j,s_{-j})<u_i(s)$. The profile *s* is said to ***contain the threat*** to player *i*. The profile (s'_j,s_{-j}) and the strategy s'_j of player *j* is said to ***threaten*** to player *i*.

Definition 2. Strategy s_i of player *i* is ***a simple secure strategy*** at a given s_{-i} if the profile *s* does not contain any threats for player *i*.

Definition 3. The set $W_i(s)\subseteq X_i$ ***of preferable strategies secured against threats*** is the set of strategies s'_i of player *i* at a given *s* such that $u_i(s'_i,s_{-i})\geq u_i(s)$ and provided that $u_i(s'_i,s'_j,s_{-ij})\geq u_i(s)$ for any threat $\{(s'_i,s_{-i}),(s'_i,s'_j,s_{-ij})\}$ of player $j\neq i$ to player *i*.

Definition 4. The profile s^* is a ***simple Equilibrium in Secure Strategies*** (ESS) if and only if for all *i* we have that $W_i(s^*)\neq\varnothing$, $\quad s_i^*\in\arg\max\limits_{s_i\in W_i(s^*)} u_i(s_i,s_{-i}^*)$.

Игра с неизвестным инсайдером

Институт Проблем Управления РАН

Пусть задана игра: $\Gamma = (x_i, K_i(x_1,...,x_n), i \in N = \{1,...,n\})$

I. Рассмотрим следующую 2-шаговую игру $\tilde{\Gamma}$ с неопределенностью $\theta \in N$:

На первом шаге все игроки определяют свои стратегии x_i.

На втором шаге:

Определяется состояние природы $\theta \in N$;

Игрок θ имеет возможность изменить свою стратегию на $\tilde{x}_\theta$;

Определяются выигрыши $K_i(x_1,...,\tilde{x}_\theta,...,x_n)$.

Игроки устраняют вероятностную неопределенность по методу гарантированного результата.

II. Игра $\hat{\Gamma}$, вариант: Игрок θ изменяет свою стратегию случайным образом, при условии что его выигрыш увеличивается.

Утверждение. Профиль X^* является равновесием в безопасных стратегиях в игре Γ $\Leftrightarrow$ профиль X^*, $\tilde{X}^* = X^*$ является равновесием Нэша в игре $\hat{\Gamma}$.

РБС и равновесие Нэша

Институт Проблем Управления РАН

Определение 5. Множество безопасных стратегий *игрока i при заданном окружении x_{-i} обозначается $V_i(x_{-i})$.*

Определение 6. Функцией наилучших безопасных ответов игрока *i называется многозначная функция $BSR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in V_i(x_{-i})} u_i(x_i, x_{-i})$.*

Определение 7. Множеством наилучших безопасных ответов игрока *i называется множество $M_{BSR_i} = \{x \mid x_i = BSR_i(x_{-i}), \forall x_{-i} \in X_{-i}\}$.*

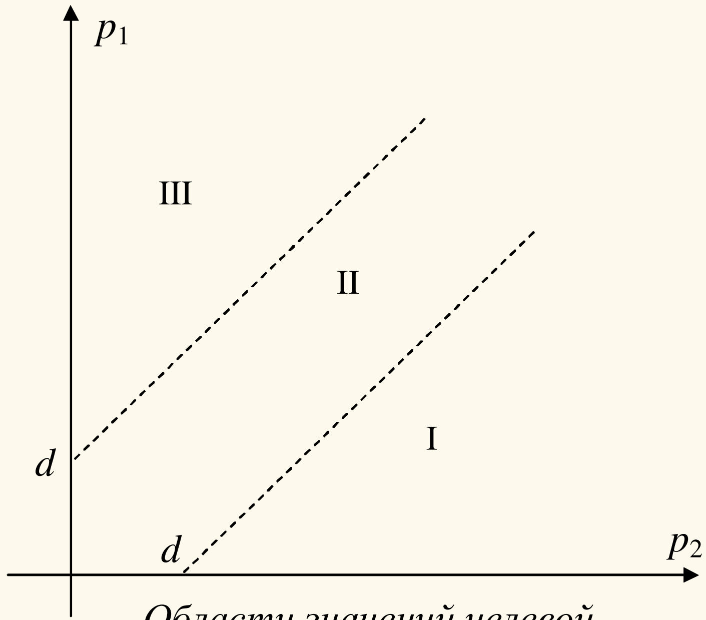
Определение 8. Множеством наилучших безопасных ответов *называется множество $M_{BSR} = \bigcap_i M_{BSR_i} = \{x \mid x_i = BSR_i(x_{-i}), \forall i \in N\}$*

Если множество равновесий Нэша обозначить как M_{NE}, а множество РБС – M_{SSE}, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. $M_{NE} \subseteq M_{SSE} \subseteq M_{BSR}$. *Обратное вложение множеств – неверно.*

Ценовая игра Хотеллинга с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН



Области значений целевой функции $u_1(p_1, p_2)$

Пусть заданы: позиции игроков $x_1, x_2 \in R$ (или a, b).

Стратегии игроков: p_1, p_2.

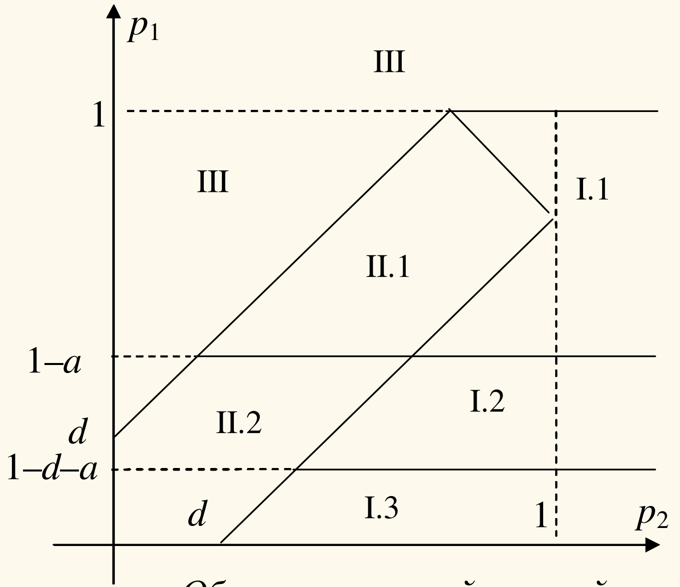
Целевые фукнции:

$$u_1(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_1(a+b+d), & p_1 < p_2 - d \\ p_1\left(a + \dfrac{d + p_2 - p_1}{2}\right), & | p_1 - p_2 | \le d \\ 0, & p_1 > p_2 + d \end{cases}$$

$$u_2(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_2(a+b+d), & p_2 < p_1 - d \\ p_2\left(b + \dfrac{d + p_1 - p_2}{2}\right), & | p_1 - p_2 | \le d \\ 0, & p_2 > p_1 + d \end{cases}$$

Ценовая игра Хотеллинга с эластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН



Области значений целевой функции $u_1(p_1, p_2)$

Пусть заданы: позиции игроков $x_1, x_2 \in R$ (или a, b).

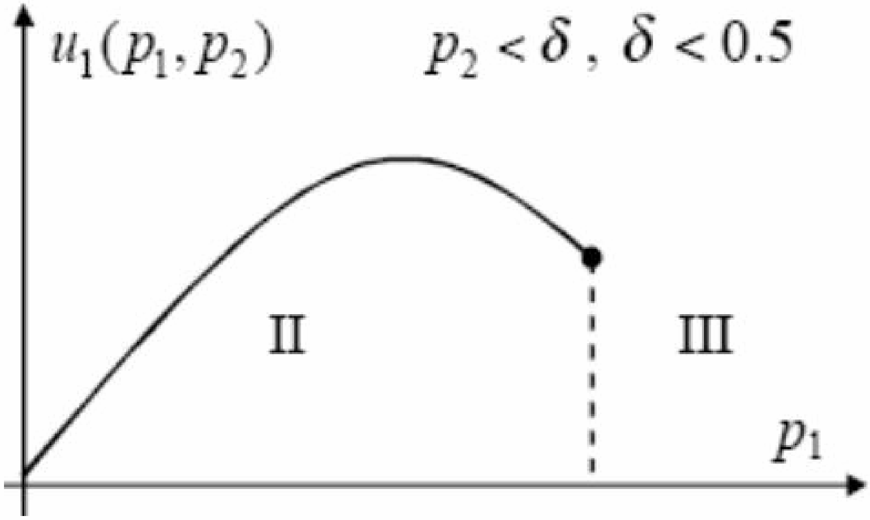
Стратегии игроков: p_1, p_2.

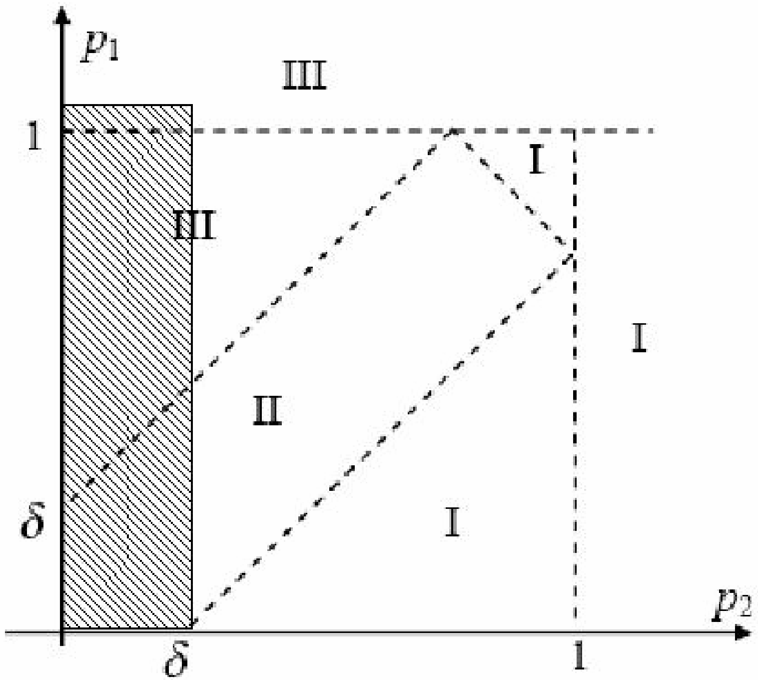
Целевые фукнции:

$$u_1(a,b,p_1,p_2)=\begin{cases} p_1(\min\{1-p_1,a\}+\min\{1-p_1,b+d\}), & p_1<p_2-d \\ p_1\left(\min\{1-p_1,a\}+\min\left\{1-p_1,\dfrac{d+p_2-p_1}{2}\right\}\right), & |p_1-p_2|\le d \\ 0, & p_1>p_2+d \end{cases}$$

$$u_2(a,b,p_1,p_2)=\begin{cases} p_2(\min\{1-p_2,b\}+\min\{1-p_2,a+d\}), & p_2<p_1-d \\ p_1\left(\min\{1-p_2,b\}+\min\left\{1-p_2,\dfrac{d+p_1-p_2}{2}\right\}\right), & |p_1-p_2|\le d \\ 0, & p_2>p_1+d \end{cases}$$

Целевая функция игрока 1 при p2<delta



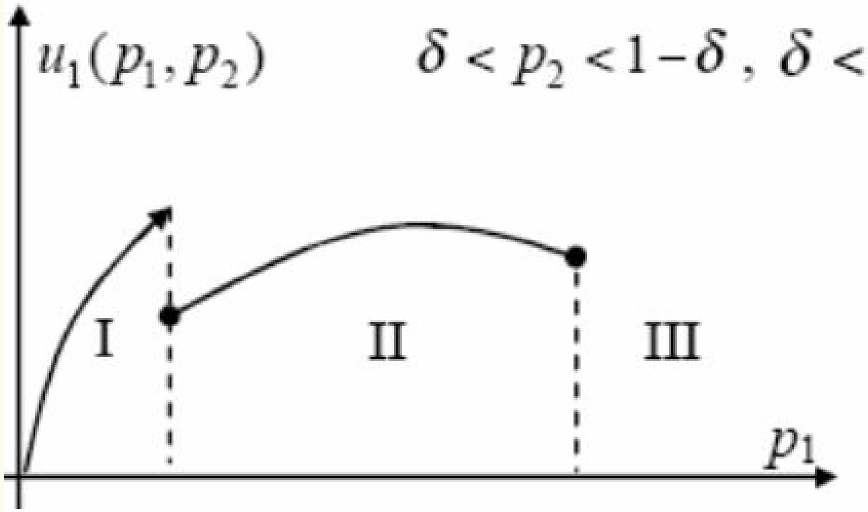


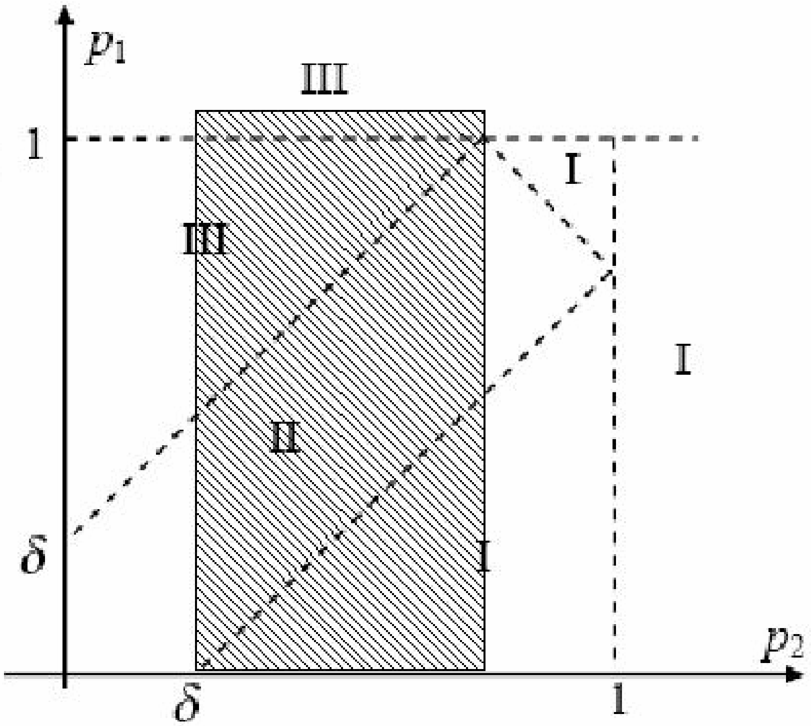
$$u_I(p_1) = 2p_1(1-p_1),$$

$$u_{II}(p_1, p_2) = p_1\left(1 - p_1 + \frac{p_2 - p_1 + \delta}{2}\right), \quad u_{III} = 0$$

Целевая функция игрока 1 при delta<p2<1-delta

$$\delta < p_2 < 1-\delta\ ,\ \delta < 0.5$$



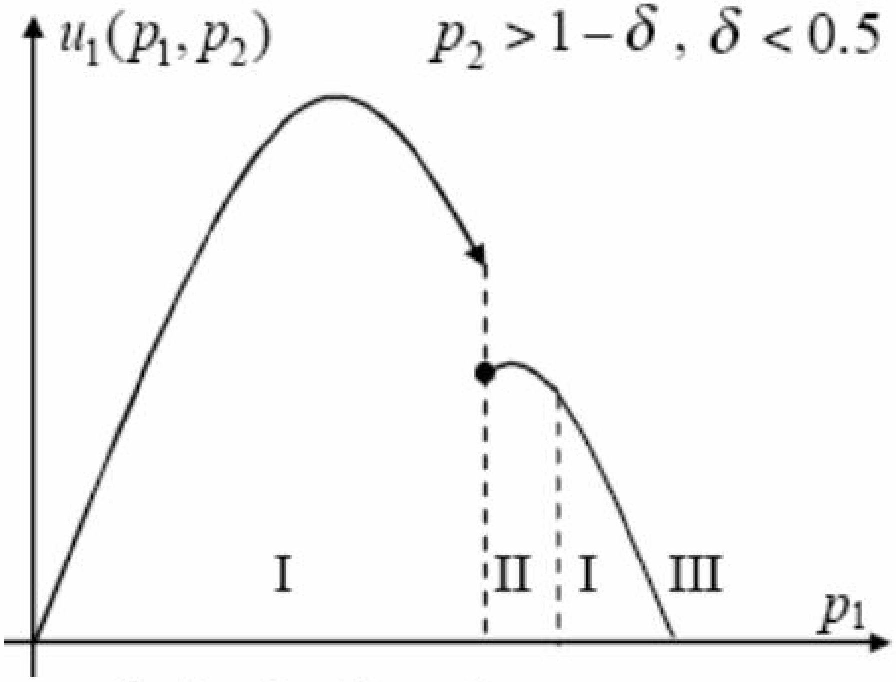


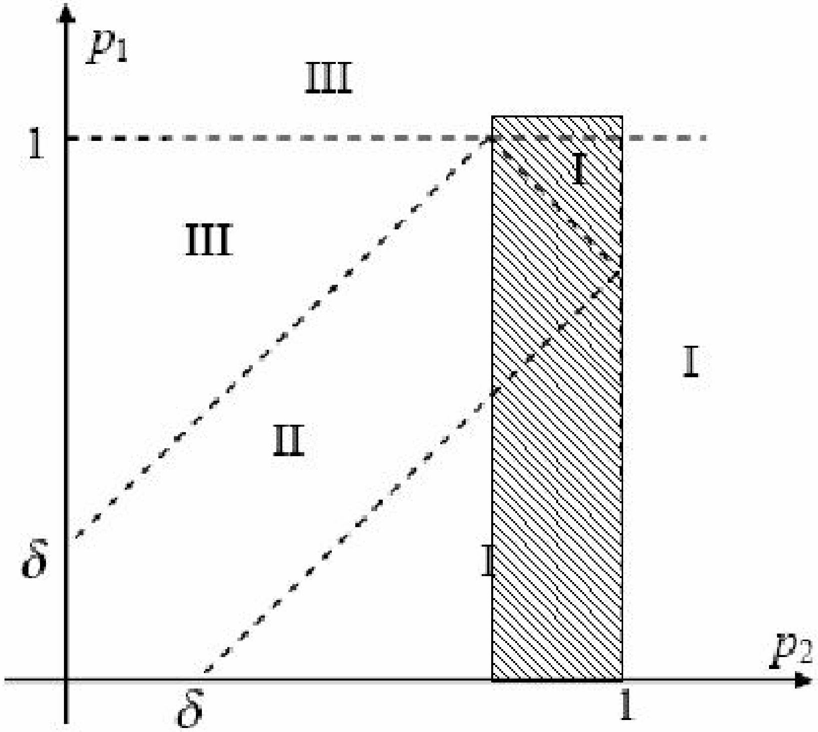
$$u_I(p_1) = 2p_1(1-p_1),$$

$$u_{II}(p_1, p_2) = p_1\left(1 - p_1 + \frac{p_2 - p_1 + \delta}{2}\right), \quad u_{III} = 0$$

Целевая функция игрока 1 при p2>1-delta

Институт Проблем Управления РАН





$$u_I(p_1) = 2p_1(1 - p_1),$$

$$u_{II}(p_1, p_2) = p_1\left(1 - p_1 + \frac{p_2 - p_1 + \delta}{2}\right), \quad u_{III} = 0$$

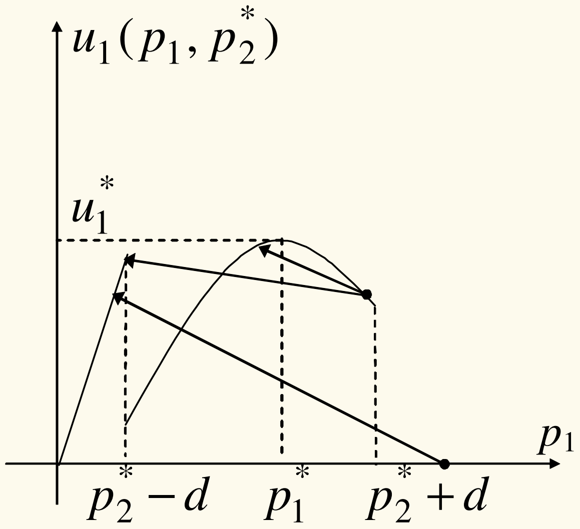
Возможные угрозы в задаче Хотеллинга

Три возможности увеличения выигрыша игроком в ЗХ:

1) Появление отсутствующего на рынке, «вытесненного» игрока

2) Расширение соперником покупательской зоны с соответствующим сокращением своей

3) Полное вытеснение с рынка



Три возможности увеличения выигрыша игроком 1

Безопасные стратегии в задаче Хотеллинга

Институт Проблем Управления РАН

Теорема 2. *Пусть задана игровая задача определения цен (с неэластичным либо эластичным спросом)* $(p_i \in P_i, u_i(p_1, p_2), i \in \{1,2\})$. *Тогда множество профилей, безопасных для обоих игроков, будет определяться для неэластичной задачи как* $M_{SS} = M_1$, *а для эластичной задачи* $M_{SS} = (M_1 \cup M_2)$, *где множество* M_1 *задается системой неравенств:*

$$\begin{cases} p_1 \le \arg\max\limits_{|p_2 - p| \le d} u_1(p, p_2) \\ p_2 \le \arg\max\limits_{|p_1 - p| \le D} u_2(p_1, p) \\ u_1^I(p_2 - d) \le u_1^{II}(p_1, p_2), \text{ ïðè } p_2 > d \\ u_2^I(p_1 - d) \le u_2^{II}(p_1, p_2), \text{ ïðè } p_1 > d \end{cases}$$

Множество M_2 *задается системой неравенств:*

$$\begin{cases} p_1 + p_2 > 2 - d \\ u_1^I(p_1) \ge u_1^I(2 - d - p_2) \\ u_2^I(p_2) \ge u_2^I(2 - d - p_1) \end{cases}$$

Любое решение игры в смысле РБС принадлежит множеству M_{SS}.

Условие безопасности от сокращения покупательской зоны

Институт Проблем Управления РАН

Условие безопасности от сокращения покупательской зоны:

$$\begin{cases} p_1 \le \arg\max\limits_{|p_2 - p| \le d} u_1(p, p_2) \\ p_2 \le \arg\max\limits_{|p_1 - p| \le D} u_2(p_1, p) \end{cases}$$

Обозначим: $BR_i^{II}(p_{-i}) = \arg\max\limits_{|p_{-i} - p| \le d} u_i^{II}(p, p_{-i})$

Лемма 1. *Функция* $BR_i^{II}(p_{-i})$ *определяется следующей формулой:*

$$BR_i^{II}(p_{-i}) = \max\left\{ p_{-i} - d, \min\left\{ \begin{array}{l} p_{-i} + d, \dfrac{2a_i + d + p_{-i}}{2}, \max\left\{1 - a_i, \dfrac{2 + d + p_{-i}}{6}\right\}, \\ \max\{2 - d - p_{-i}, 0.5, \min\{0.5(1 + a_i), 1 - a_{-i}\}\} \end{array} \right\} \right\}$$

Условие безопасности от полного вытеснения

Институт Проблем Управления РАН

Условие безопасности от полного вытеснения:

$$\begin{cases} u_1^I(p_2 - d) \le u_1^{II}(p_1, p_2), \text{ ï ðè } p_2 > d \\ u_2^I(p_1 - d) \le u_2^{II}(p_1, p_2), \text{ ï ðè } p_1 > d \end{cases}$$

Лемма 2. *Для профиля* $(p_1, p_2) \in M_{II}$ *условие безопасности от вытеснения в ценовой игре с эластичным спросом можно записать в форме:* $p_i \le D_i^-(p_{-i}) \text{ èëè } p_i \ge D_i^+(p_{-i})$, *где функции ограничения безопасности от вытеснения:* $D_i^-(p_{-i}) = \begin{cases} D^{a-}, \hat{p}_i^{\max} \le D^{a-} \\ D^{b-}, \hat{p}_i^{\min} \le D^{b-} \le \hat{p}_i^{\max} \\ D^{c-}, d \le D^{c-} \le \hat{p}_i^{\min} \end{cases}$; $D_i^+(p_{-i}) = \begin{cases} D^{a+}, \hat{p}_i^{\max} \le D^{a+} \\ D^{b+}, \hat{p}_i^{\min} \le D^{b+} \le \hat{p}_i^{\max} \end{cases}$

$$D^{a\pm} = d + \frac{4 - p_{-i}}{8} \pm \sqrt{\max\left\{0, \left(\frac{4 - p_{-i}}{8}\right)^2 - \frac{\gamma_{-i}(p_{-i})}{2}\right\}}$$

$$D^{b\pm} = d + \frac{2 + 2\Delta_{-i} - p_{-i}}{4} \pm \sqrt{\max\left\{0, \left(\frac{2 + 2\Delta_{-i} - p_{-i}}{4}\right)^2 - \lambda_{-i}(p_{-i})\right\}}$$

$$D^{c-} = \begin{cases} d + \frac{2\gamma_{-i}(p_{-i})}{2l - p_{-i}}, \gamma_{-i}(p_{-i}) > 0 \\ d, \gamma_{-i}(p_{-i}) \le 0 \end{cases}$$

однозначно определены и непрерывны для всех $p_{-i} \in [0,1]$.

Наилучший безопасный ответ в задаче Хотеллинга

Определение 9. Функцией наилучшего ответа, безопасного от вытеснения *называется функция:*

$$BSR_i^D(p_{-i}) = \underset{p:(p,p_{-i})\in M_{Di}}{\arg\max}\ u_i(p, p_i)$$

$$M_{Di} = \{(p_i, p_{-i}) : |\, p_i - p_{-i} \,| \le d, u_{-i}^{II}(p_i, p_{-i}) \ge \max_{p<p_{-i}-d} u_{-i}^{I}(p)\}$$

Лемма 3. *Если* $D_i^-(p_{-i}) \ne D_i^+(p_{-i}), D_i^-(p_{-i}) \ge p_{-i} - d$, *то наилучший безопасный от вытеснения ответ i на стратегию конкурента* p_{-i} *в ценовой игре Хотеллинга с эластичным спросом определяется как:*

$$BSR_i^D(p_{-i}) = \min\{BR_i^{II}(p_{-i}), D_i^-(p_{-i})\}.$$

Если $D_i^-(p_{-i}) = D_i^+(p_{-i})$, *то* $BSR_i^D(p_{-i}) = BR_i^{II}(p_{-i})$.

Если $D_i^-(p_{-i}) \ne D_i^+(p_{-i}), D_i^-(p_{-i}) < p_{-i} - d$, *то все ответы игрока i на* p_{-i} *в границах множества* M_{II} *будут небезопасны от вытеснения.*

Существование РБС в ценовой игре задачи Хотеллинга

Институт Проблем Управления РАН

Теорема 5. *Игровая задача определения цен* $\Gamma : (p_i \in [1{,}0], u_i, i \in \{1{,}2\})$ *всегда имеет решение в смысле РБС.*

Любое РБС (p_1^*, p_2^*) *определяется системой уравнений:*

$$p_1^* = BSR_1(p_2^*) = BSR_1^D(p_2^*),$$

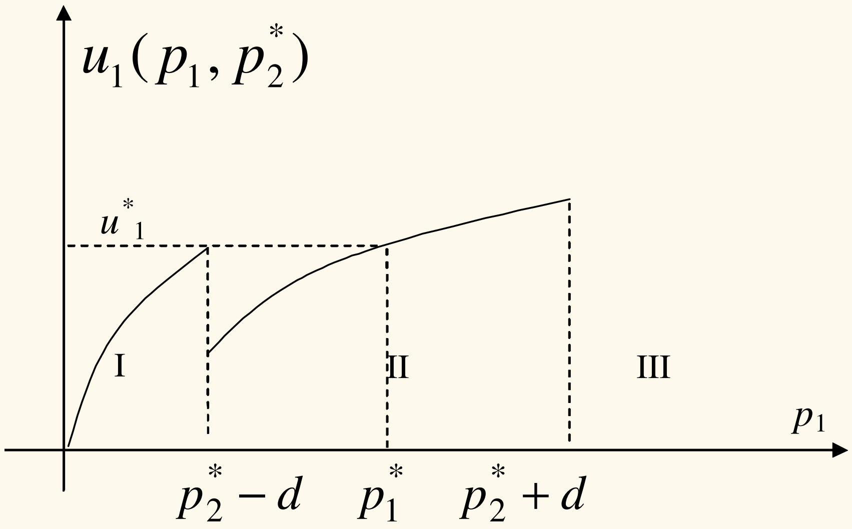
$$p_2^* = BSR_2(p_1^*) = BSR_2^D(p_1^*)$$

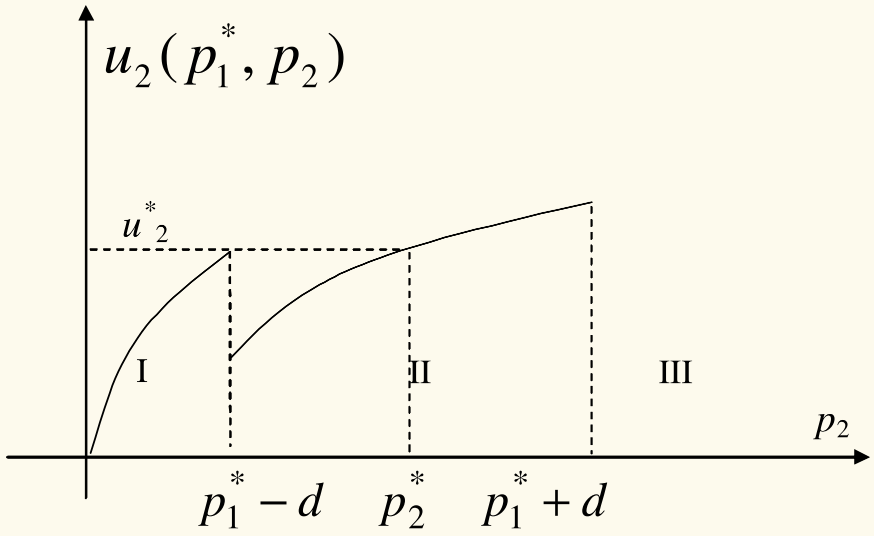
Типы равновесий в игре цен: двустороннее РБС

Институт Проблем Управления РАН

1) Двустороннее равновесие в безопасных стратегиях:

$$\begin{cases} u_{1.II}(p_1^*, p_2^*) = u_{1.I}(p_1^* - d) \\ u_{2.II}(p_2^*, p_1^*) = u_{2.I}(p_2^* - d) \end{cases}$$

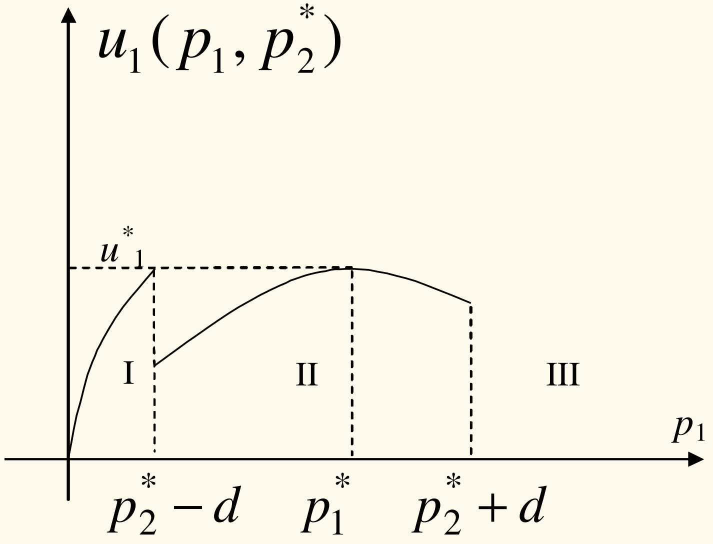


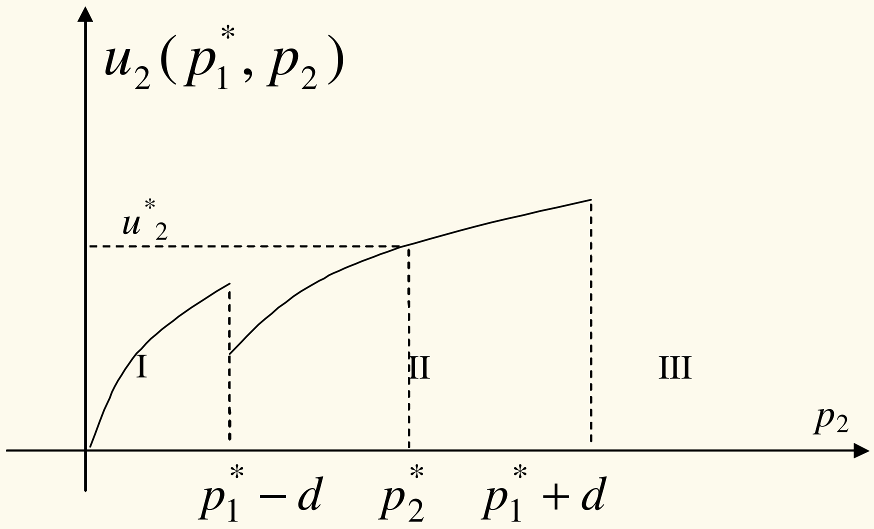


Типы равновесий в игре цен: одностороннее РБС

1) Одностороннее равновесие в безопасных стратегиях:

$$\begin{cases} u_{1.II}(p_1^*, p_2^*) = u_I(p_1^* - d) \\ u_{1.II}(p_1^*, p_2^*) = \max\limits_{p_2} u_{II}(p_1^*, p_2) \end{cases}$$



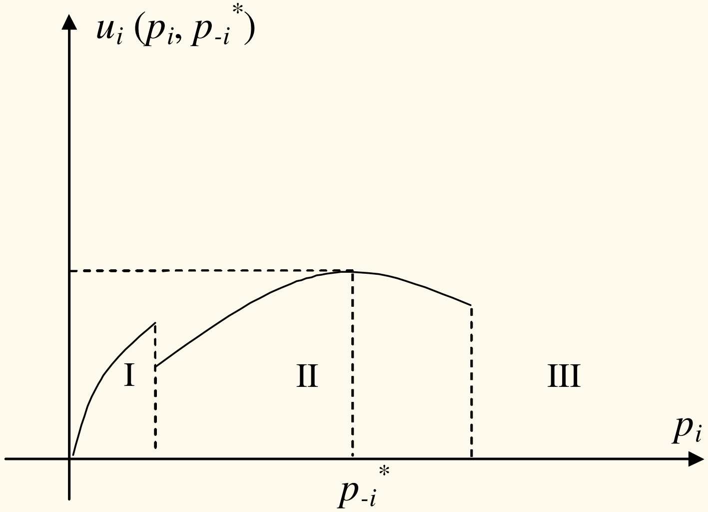


Типы равновесий в игре цен: равновесия Нэша

Институт Проблем Управления РАН

3) Равновесие Хотеллинга:

$$\begin{cases} u_{1.II}(p_1^*, p_2^*) = \max\limits_{p_1} u_{1.II}(p_1, p_2^*) \\ u_{2.II}(p_2^*, p_1^*) = \max\limits_{p_2} u_{2.II}(p_2, p_1^*) \end{cases}$$



4) Равновесие при условии отрыва:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{1.II}(p_1^*, p_2^*)}{\partial p_1} > 0 \\ \dfrac{\partial u_{1.I}(p_1^*)}{\partial p_1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_{2.II}(p_1^*, p_2^*)}{\partial p_2} > 0 \\ \dfrac{\partial u_{2.I}(p_1^*)}{\partial p_2} < 0 \end{cases}$$

5) Области игроков не пересекаются

Решение ценовой игры с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН

Теорема 3. *Игровая эластичная задача определения цен* $(P_i = R^+, u_i(p_1, p_2), i \in \{1,2\})$ *имеет следующее единственное решение в смысле РБС для любых допустимых значений параметров* $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq l$:

1) При $\begin{array}{l} a \leq 3l + b - 6\sqrt{bl}, \\ b \leq 3l + a - 6\sqrt{al}, \end{array}$:
$$p_1^* = l + \frac{a-b}{3}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2,$$
$$p_2^* = l - \frac{a-b}{3}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2.$$

2) При
$$a \leq \frac{\sqrt{l} - \sqrt{b}}{\sqrt{l} + \sqrt{b}}(4\sqrt{bl} - l - b), \quad a \geq 3l + b - 6\sqrt{bl}, :$$
$$p_1^* = 2l - 2\sqrt{bl}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2,$$
$$p_2^* = 3l + b - a - 4\sqrt{bl}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}p_2^*(l - a + b + p_1^* - p_2^*).$$

3) При
$$b \leq \frac{\sqrt{l} - \sqrt{a}}{\sqrt{l} + \sqrt{a}}(4\sqrt{al} - l - a), \quad b \geq 3l + a - 6\sqrt{al}, :$$
$$p_1^* = 3l + a - b - 4\sqrt{al}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}p_1^*(l + a - b + p_2^* - p_1^*),$$
$$p_2^* = 2l - 2\sqrt{al}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2.$$

Решение ценовой игры с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН

$$4)\ \textit{При}\ \begin{array}{l} a \ge \dfrac{\sqrt{l}-\sqrt{b}}{\sqrt{l}+\sqrt{b}}(4\sqrt{bl}-l-b), \\ b \ge \dfrac{\sqrt{l}-\sqrt{a}}{\sqrt{l}+\sqrt{a}}(4\sqrt{al}-l-a), \end{array} :$$

$$p_i^* = 2(l - y_i), \quad u_i^* = l(p_{-i}^* - l + a + b), \quad i \in \{1,2\},$$

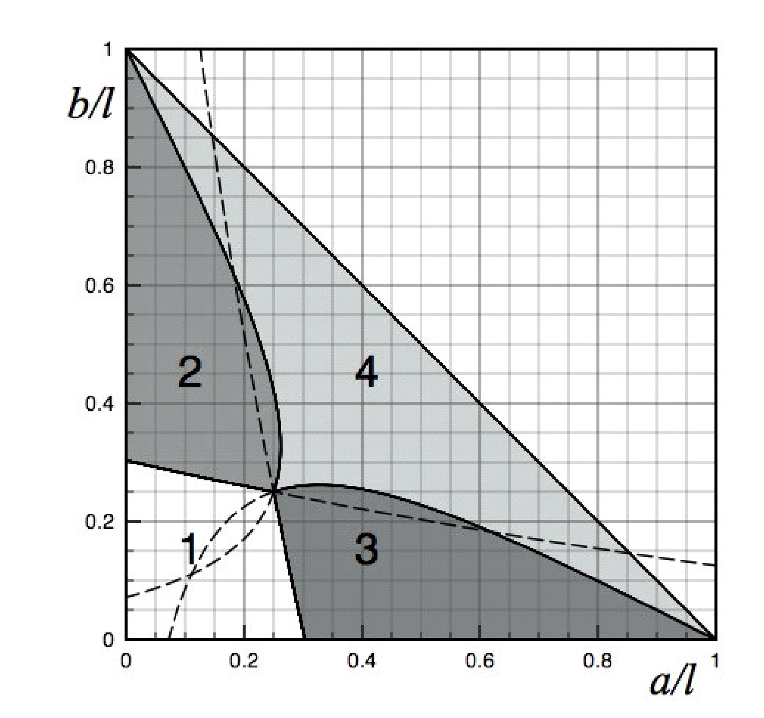
$$y_i = \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} + \sqrt{R_i}} + \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} - \sqrt{R_i}} + \frac{g_i}{6},$$

$$R_i = \left(\frac{s_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{r_i}{2}\right)^2,$$

$$s_i = -\frac{g_i^2}{12} + \frac{f_i h_i}{2}, \quad r_i = -\frac{g_i^3}{108} + \frac{f_i g_i h_i}{12} - f_i^2 l,$$

$$g_1 = l + a + 3b, \quad h_1 = 3l - a + b, \quad f_1 = b,$$

$$g_2 = l + 3a + b, \quad h_2 = 3l + a - b, \quad f_2 = a.$$



Области решений неэластичной задачи

Решение игры расположений с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН

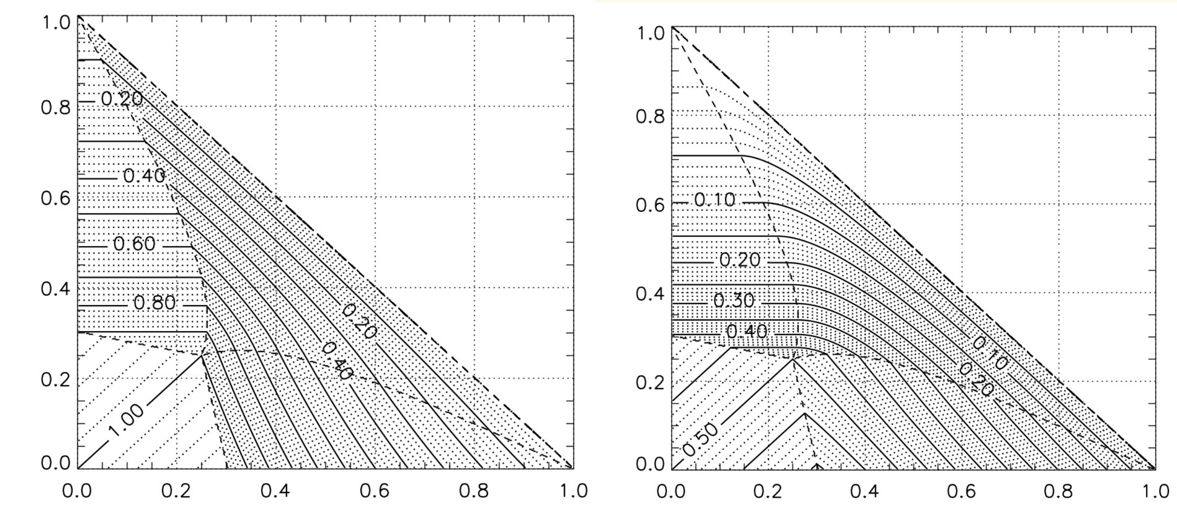
Теорема 4. *Пусть задана игровая задача расположений с неэластичным спросом* $(x_1 = a, x_2 = l - b, u_i(p_1^*(a,b), p_2^*(a,b)), i \in \{1,2\})$. *Решение игры определяется следующим множеством равновесий Нэша* (a^*, b^*)*:*

1) $a^* = 0.25\, l, \quad b^* = 0.25\, l;$

2) $$\left(l + \frac{a^* - b^*}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}(2a^* + b^*)l, \quad a^* > 0.25\, l;$$

3) $$\left(l - \frac{a^* - b^*}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}(a^* + 2b^*)l, \quad b^* > 0.25\, l.$$

http://www.hse.ru/org/hse/wp



Решение ценовой игры p_1^* / l *(слева) и* u_1^* / l *(справа)*

Решение игры цен на прямой

Институт Проблем Управления РАН

I решение с учетом угроз:

$$\text{При } \delta \in \left[0, \frac{-2.24+\sqrt{25.6}}{10.72}\right] \approx [0, 0.263]$$

$$p_1^* = p_2^* = p^* = \frac{2+7\delta-\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$$

II решение Хотеллинга:

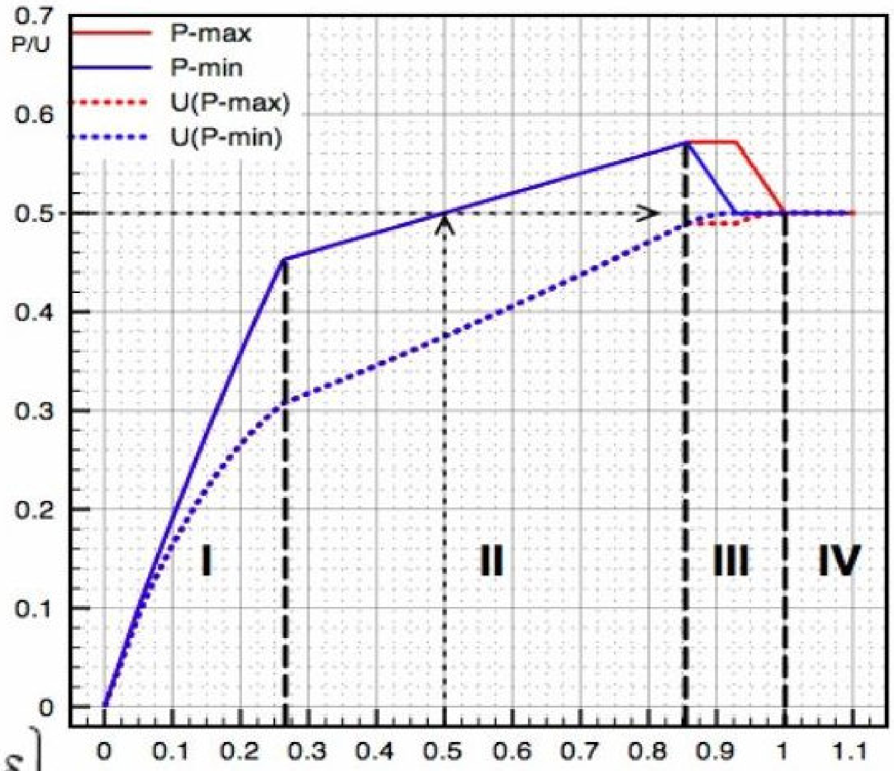
$$\delta \in [0.263, 6/7]$$

$$p_1^* = p_2^* = p^* = 0.4+0.2\delta$$

III решение при условии отрыва: $\delta \in [6/7, 1]$

$$\max\left\{\frac{10}{7}-\delta, 0.5\right\} \le p_1^* \le \min\left\{\frac{4}{7}, 1.5-\delta\right\}$$

IV независимое решение: $\delta \ge 1$ $p_i^* = u_i^* = 0.5$

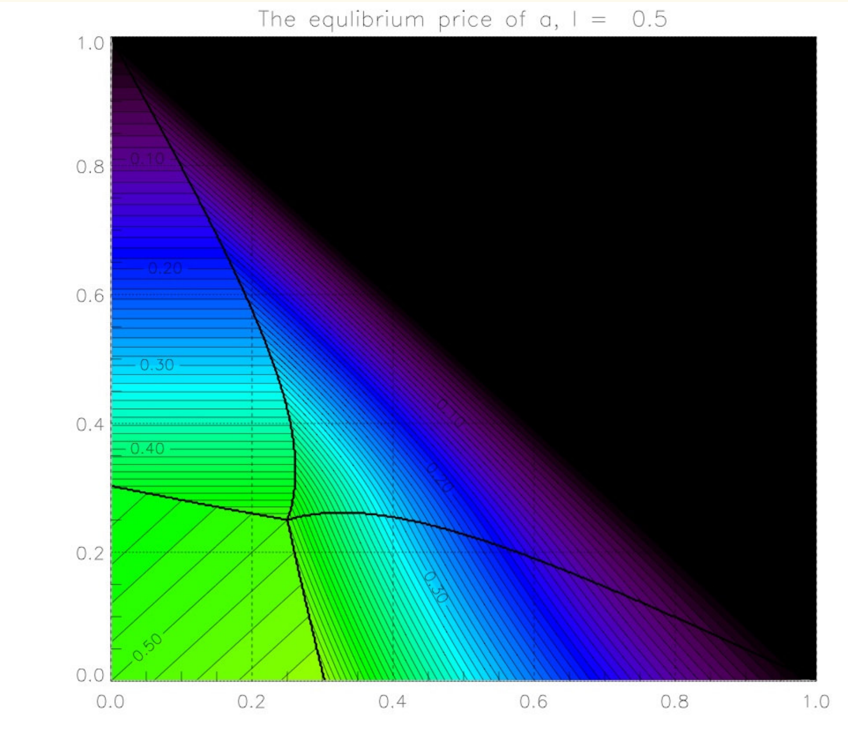


Парадокс: при $\delta \in (0.5, 1)$ уровень цен, устанавливающихся при конкуренции выше, чем в монопольном случае непересекающихся областей.

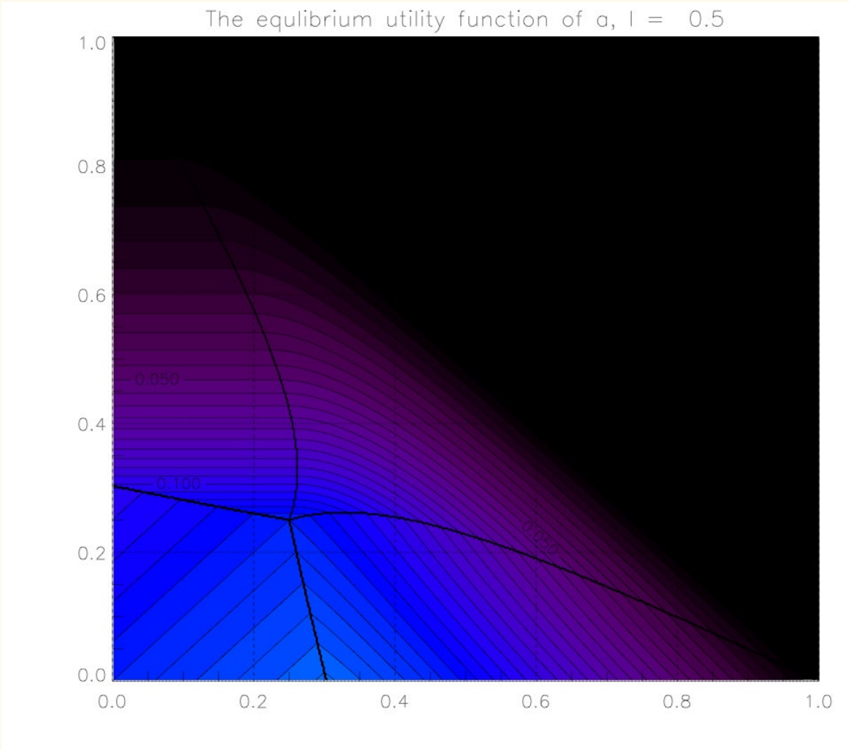
Решение игры цен: длина отрезка L=0.5 (неэластичный случай)

Институт Проблем Управления РАН

Цены



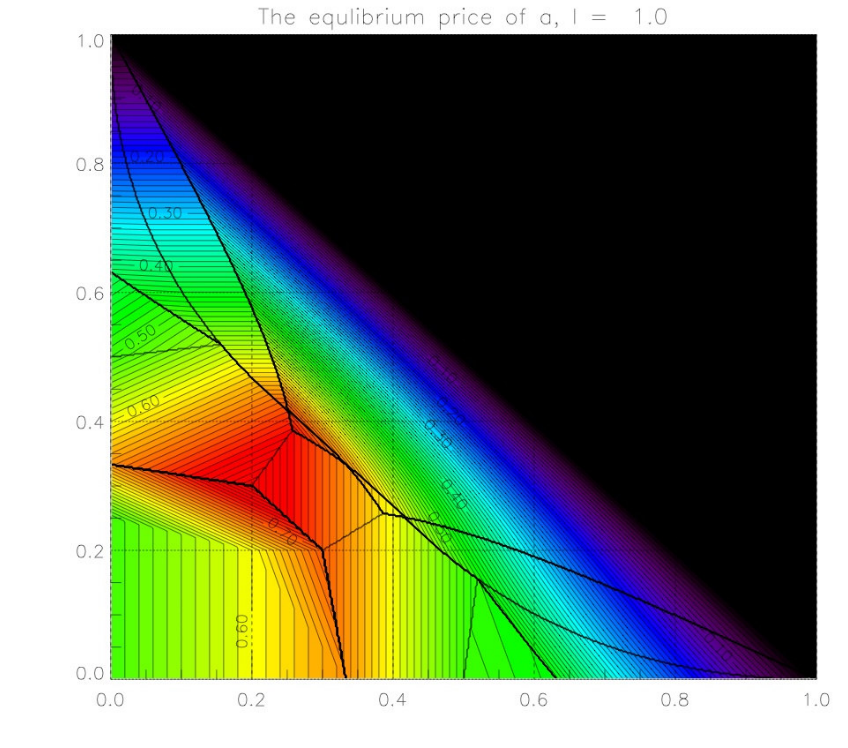
Выигрыши



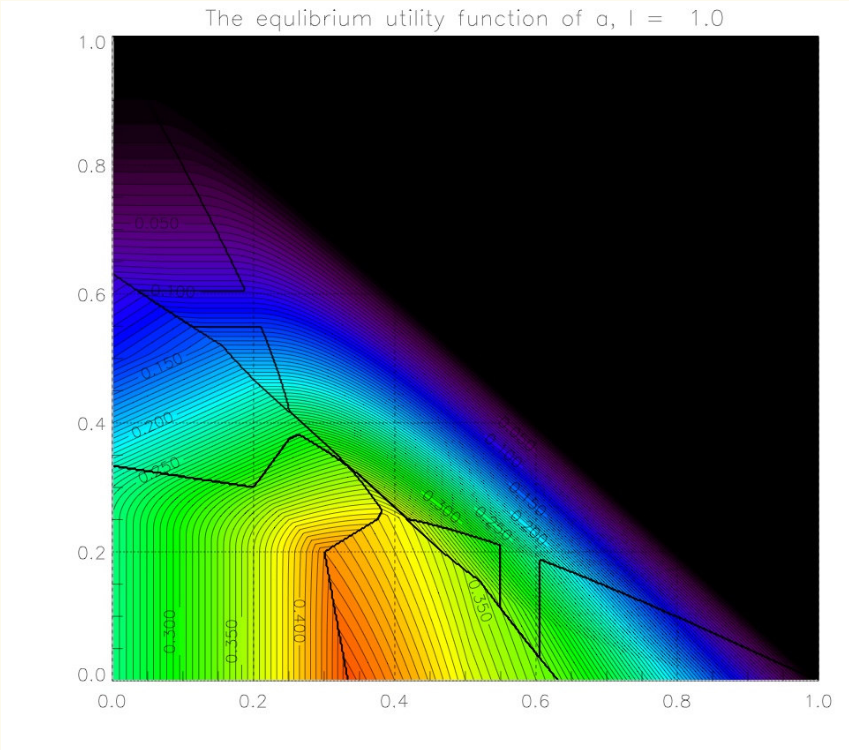
Решение игры цен: длина отрезка L=1.0 (эластичный спрос)

Институт Проблем Управления РАН

Цены



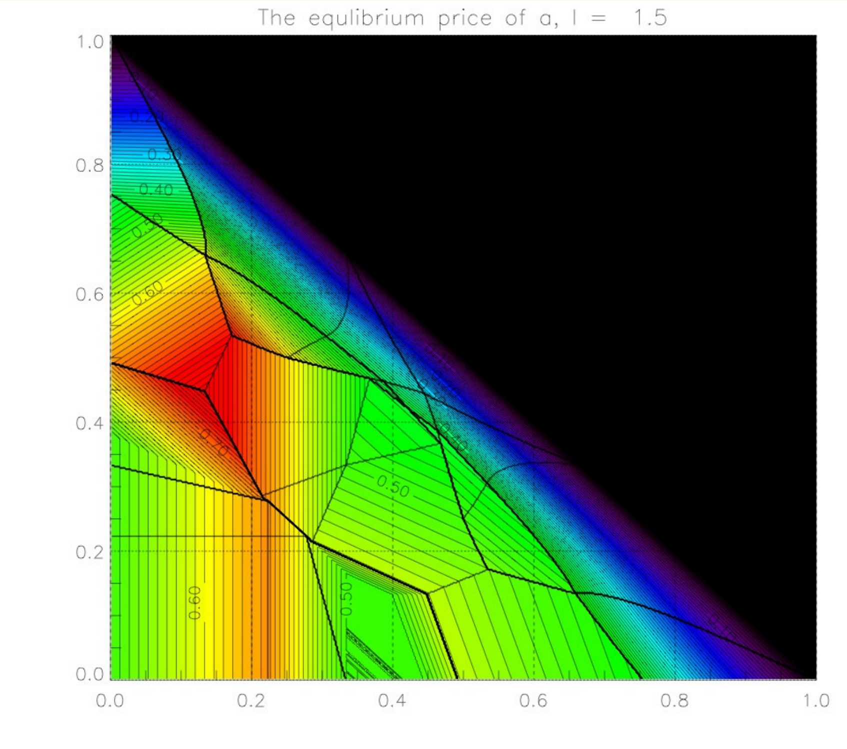
Выигрыши



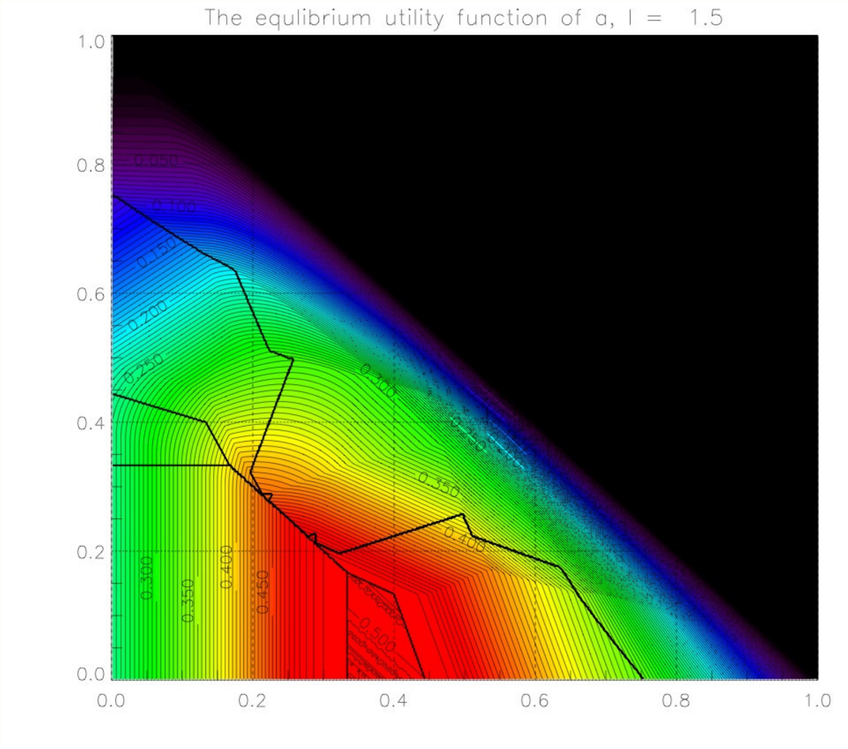
Решение игры цен: длина отрезка L=1.5

Институт Проблем Управления РАН

Цены



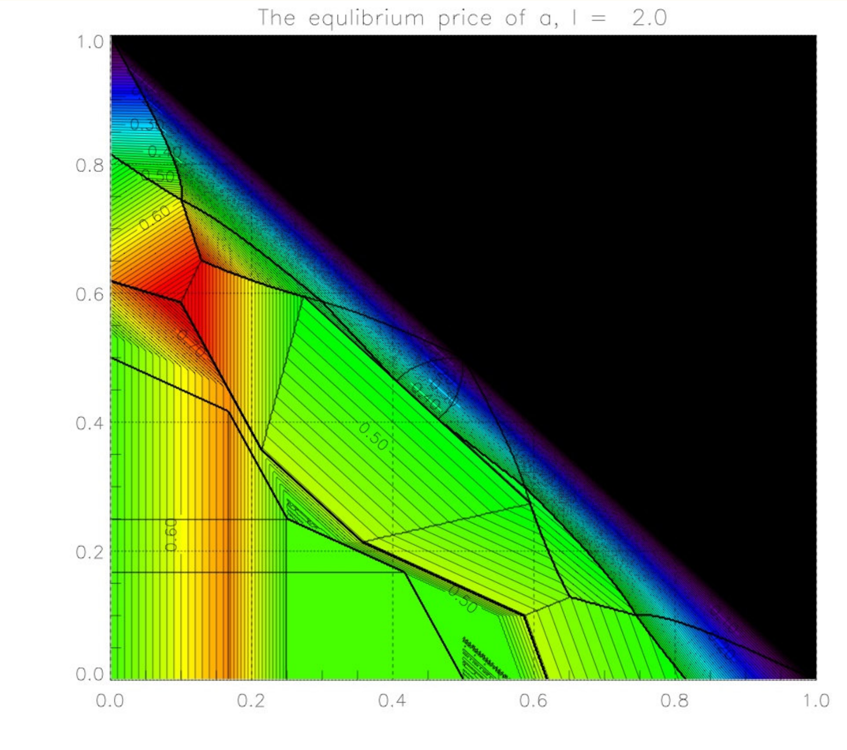
Выигрыши



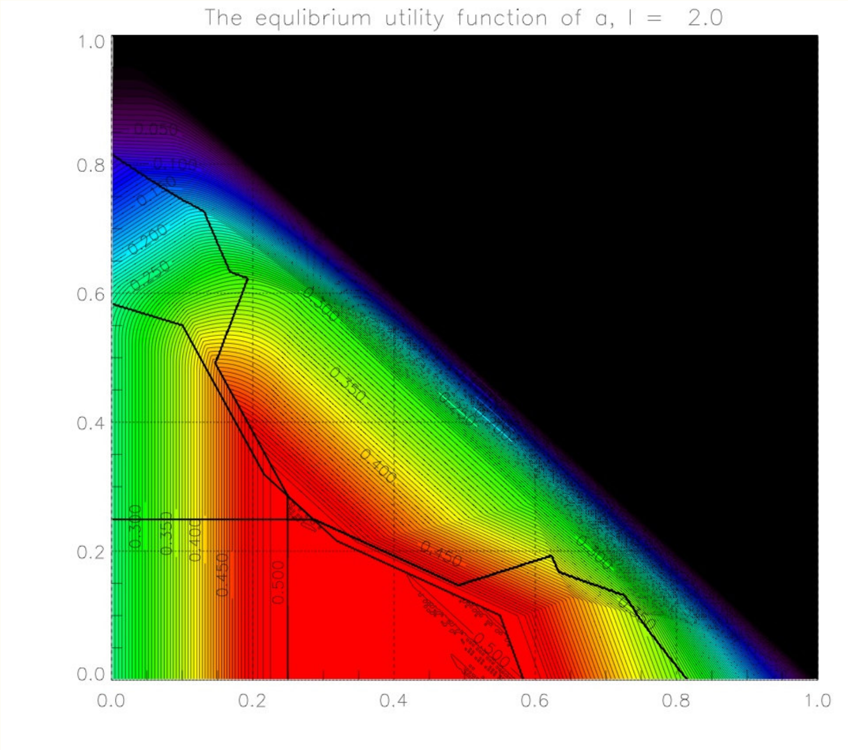
Решение игры цен: длина отрезка L=2.0

Институт Проблем Управления РАН

Цены



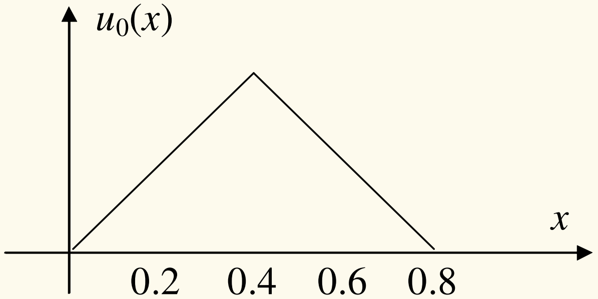
Выигрыши



Пример: повышение цен при переходе от монополии к дуополии

Институт Проблем Управления РАН

$A = 0,\ B = 0.8,\ l = 0.8$



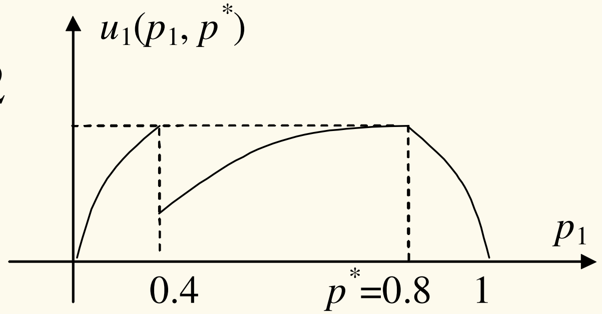
1) Монополия:

$$p_1^* = 0.6,\ x_1 = 0.4,\ u_1^* = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$$

Полезность покупателей от приобретения товара:

$$u_0(x) = \begin{cases} x, x \le 0.4 \\ 0.8 - x, x \ge 0.4 \end{cases}$$

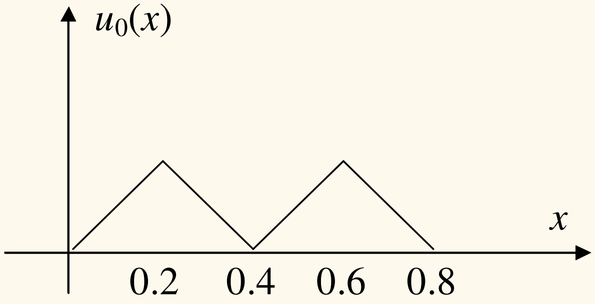
2) Дуополия:



$$a^* = b^* = 0.2,\quad p_1^* = p_2^* = 0.8,\ u^* = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32$$

$$u_1(p_1, p_2^*) = \begin{cases} 0.8 p_1, & p_1 \in [0, 0.4] \\ 0.5 p_1 (1.6 - p_1), & p_1 \in [0.4, 0.8] \\ 2 p_1 (1 - p_1), & p_1 \in [0.8, 1] \end{cases}$$

Полезность покупателей $u_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 0.2] \\ 0.4 - x, & x \in [0.2, 0.4] \\ x - 0.4, & x \in [0.4, 0.6] \\ 0.8 - x, & x \in [0.6, 0.8] \end{cases}$



Аналитическое решение игры цен при эластичном спросе

Институт Проблем Управления РАН

1) **Независимое равновесие**:

$$p_1^* = \max\{0.5, \min\{0.5(1+a), 1-a\}\},\ p_2^* = \max\{0.5, \min\{0.5(1+b), 1-b\}\},$$

При условии:

$$\sum_{i\in\{1,2\}} \max\{0.5, \min\{0.5(1+a_i), 1-a_i\}\} \geq 2-d$$

2) **Равновесие отрыва**:

$$p_1^* \leq \max\left\{\begin{matrix} \max\{0.5, \min\{0.5(1+a), 1-a\}\} \\ \min\left\{\frac{10}{7} - d, \max\left\{\frac{4}{3} - d - \frac{b}{3}, 1-d+b\right\}\right\} \end{matrix}\right\}$$

$$p_1^* \geq \min\left\{\begin{matrix} \max\left\{\frac{4}{7}, \min\left\{\frac{2}{3}(1+a), 1-a\right\}\right\} \\ \min\left\{\frac{3}{2} - d, \max\left\{\frac{3}{2} - d - \frac{b}{2}, 1-d+b\right\}\right\} \end{matrix}\right\}$$

$$p_2^* = 2 - d - p_1^*$$

$$\sum_{i\in\{1,2\}} \max\{0.5, \min\{0.5(1+a_i), 1-a_i\}\} \leq 2-d$$

При условии:

$$\sum_{i\in\{1,2\}} \max\left\{\frac{4}{7}, \min\left\{\frac{2}{3}(1+a_i), 1-a_i\right\}\right\} \geq 2-d$$

Аналитическое решение игры цен при эластичном спросе

Институт Проблем Управления РАН

При условии: $\sum_{i\in\{1,2\}} \max\left\{\frac{4}{7}, \min\left\{\frac{2}{3}(1+a_i), 1-a_i\right\}\right\} \le 2-d\,1)$:

3) **Равновесие Хотеллинга**:

$$p_i^* = \min\left\{\begin{array}{l} d+\dfrac{2(2a_i+a_{-i})}{3}, \max\left\{a_i+\dfrac{1+d-a_{-i}}{2}, \dfrac{2+7d+12a_i}{11}\right\} \\ \max\left\{1-a_i, \min\left\{\dfrac{3d+4+2a_{-i}}{11}, \max\left\{\dfrac{3+d-a_{-i}}{6}, \dfrac{2+d}{5}\right\}\right\}\right\}\end{array}\right\},$$

$i=1,2$

Аналитическое решение игры цен при эластичном спросе

Институт Проблем Управления РАН

4) **Одностороннее РБС**:

$$\begin{cases} p_i^* = \dfrac{2+d+p_{-i}^*}{6} \ge 1-a_i \\ p_{-i}^* = d + \dfrac{2}{24\alpha_{-i}+1}\left(6\beta_{-i} - 1 - d - \sqrt{(6\beta_{-i}-1-d)^2 - (1+d)^2(24\alpha_{-i}+1)}\right) \end{cases},$$

$$\begin{cases} p_i^* = 1-a_i \\ p_{-i}^* = \begin{cases} d + \dfrac{1}{2\alpha_{-i}}\left(\beta_{-i} - \dfrac{1-a_i}{2} - \sqrt{\left(\beta_{-i} - \dfrac{1-a_i}{2}\right)^2 - 2\alpha_{-i}(1-a_i)(3a_i+2d-1)}\right), \alpha_{-i} \ne 0 \\ d + \dfrac{(1-a_i)(3a_i+2d-1)}{2l-(1-a_i)}, \alpha_{-i} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i^* = a_i + \dfrac{d+p_{-i}^*}{2} \le 1-a_i \\ p_{-i}^* = d + \dfrac{2}{8\alpha_{-i}+1}\left(6\beta_{-i} - a_i - d - \sqrt{(6\beta_{-i}-a_i-d)^2 - (a_i+d)^2(8\alpha_{-i}+1)}\right) \end{cases}$$

$$(\alpha_{-i}, \beta_{-i}) = \begin{cases} (2,2),\ p_{-i}^* > \max\{1-a_i+d, 1-a_{-i}\} \equiv p_{-i}^{\max} \\ (0,l),\ p_{-i}^* < \min\{1-a_i+d, 1-a_{-i}\} \equiv p_{-i}^{\min} \\ (1, 1+\min\{a_i, a_{-i}+d\}),\ p_{-i}^{\min} \le p_{-i}^* \le p_{-i}^{\max} \end{cases}$$

Аналитическое решение игры цен при эластичном спросе

4) **Двустороннее РБС**:

В общем случае решение системы сводится к решению уравнения четвертой степени. Мы не будем выписывать его аналитическое решение и предпочтем решать систему численно. Заметим только, что если не реализуются другие случаи, то рассматриваемая система $p_1^* = BSR_1(p_2^*)$, $p_2^* = BSR_2(p_1^*)$ обязательно имеет решение и притом единственное.

Было доказано, что для таких решений всегда выполняется $(u_i^*)'_{a_i} > 0$. Из этого следует, что в 2-шаговой игре расположений ни одна точка (a_i, a_{-i}), которой соответствует в качестве решения ценовой игры двустороннее РБС, не будет равновесием в игре расположений.

Теорема 6. *2-шаговая игра выбора расположений Хотеллинга* $\Gamma:(a_i \in [0,l], a_1 + a_2 \le l, u_i, i \in \{1,2\})$, *где* $u_i(a_1,a_2,p_1^*(a_1,a_2),p_1^*(a_1,a_2))$ *определяются (2.6), с равновесными безопасными стратегиями* $p_1^*(a_1,a_2), p_1^*(a_1,a_2)$ *в подыгре цен, имеет следующее решение* (a_1,a_2)*:*

1. $0 \le l \le 0.8$*:*

$$a_{-i}^* = 3l + a_i^* - 6\sqrt{la_i^*},\ \frac{l}{4} \le a_i^* \le \min\left\{\left(15-6\sqrt{6}\right)l, \left(\sqrt{l+1}-\sqrt{l}\right)^2\right\},$$

$$p_i^* = 2\sqrt{la_i^*},\ p_{-i}^* = 2\left(l-\sqrt{la_i^*}\right),\ u_i^* = 2la_i^*,\ u_{-i}^* = 2l\left(\sqrt{l}-\sqrt{a_i^*}\right)^2,\ i \in \{1,2\}$$

2. $0.8 \le l \le 0.5+\sqrt{0.15} \approx 0.887$*:*

A. $a_1^* = a_2^* = \dfrac{2l-1}{3},\ p_1^* = p_2^* = \dfrac{4-2l}{3},\ u_1^* = u_2^* = \dfrac{(2-l)l}{3}$ *(симметричное)*

B. $a_{-i}^* = \dfrac{(2l+a_i^*-1)^2}{4l},\ 1+l-\sqrt{l(4-l)} \le a_i^* \le \min\left\{a_i', 1+2l-\sqrt{2l(3l+1)}\right\},$

$$p_i^* = \frac{(1-a_{-i}^*)^2}{4l} + 1 - 2a_{-i}^*,\ p_{-i}^* = 1-a_{-i}^*,\ u_i^* = \frac{p_i^*}{2}(2l-1+a_{-i}^*),\ u_{-i}^* = \frac{(1-a_{-i}^*)^2}{2},\ i \in \{1,2\},$$

где a_i' *единственный при* $l \ge 0.8$ *корень уравнения:*

$$\frac{(1-a')^3}{4l} + 2(1-a')^2 - (6l+1)(1-a') + 4l = 0$$

3. $0.5+\sqrt{0.15}\le l\le 50/53\approx 0.943$*:*

A. $a_1^*=a_2^*=\dfrac{2l-1}{3},\ p_1^*=p_2^*=\dfrac{4-2l}{3},\ u_1^*=u_2^*=\dfrac{(2-l)l}{3}$ *(симметричное)*

B. $l\ge\dfrac{16}{17},\ a_1^*=1-\dfrac{3l}{4}\pm\dfrac{1}{4}\sqrt{l(17l-16)},\ a_2^*=1-\dfrac{3l}{4}\mp\dfrac{1}{4}\sqrt{l(17l-16)}$,

$$p_1^*=\frac{3l}{4}\mp\frac{1}{4}\sqrt{l(17l-16)},\ p_2^*=\frac{3l}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{l(17l-16)},$$

$$u_1^*=\left(2+p_2^*-\frac{5l}{2}\right),\ u_2^*=\left(2+p_1^*-\frac{5l}{2}\right)$$

C. $a_{-i}^*=\dfrac{3l}{2}+a_i^*-\dfrac{(2-l)l}{1-a_i^*}$,

$$1+l-\sqrt{l(4-l)}\le a_i^*\le\min\left\{\frac{2l^2-1}{4l-1},1-\frac{3l}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{l(17l-16)}\right\},$$

$$p_i^*=1-a_i^*,\ p_{-i}^*=1-\frac{3l}{2}-a_i^*+\frac{(2-l)l}{1-a_i^*},\ u_i^*=(1-l+a_i^*)l,\ u_{-i}^*=p_{-i}^*\frac{(l-2a_i^*)}{1-a_i^*},\ i\in\{1,2\}$$

4. $50/53<l\le 1$*:*

$a_1^*=a_2^*=\dfrac{2l-1}{3},\ p_1^*=p_2^*=\dfrac{4-2l}{3},\ u_1^*=u_2^*=\dfrac{(2-l)l}{3}$ *(симметричное)*

5. $1 \le l \le 8/7 \approx 1.143$:

$$a_{-i}^* = \frac{3l}{2} + a_i^* - \frac{(2-l)l}{1-a_i^*}, \ \frac{2l-1}{3} \le a_i^* \le \min\left\{\frac{2l^2-1}{4l-1}, \frac{1}{2}\left(l+2-\sqrt{l(8-3l)}\right)\right\},$$

$$p_i^* = 1 - a_i^*, \ p_{-i}^* = 1 - \frac{3l}{2} - a_i^* + \frac{(2-l)l}{1-a_i^*}, \ u_i^* = (1-l+a_i^*)l, \ u_{-i}^* = p_{-i}^* \frac{(l-2a_i^*)}{1-a_i^*}, \ i \in \{1,2\}$$

6. $8/7 \le l \le 4/3 \approx 1.333$:

$$a_1^* = a_2^* = 1 - l/2, \ p_1^* = p_2^* = l/2, \ u_1^* = u_2^* = l^2/2 \ (\textit{симметричное})$$

7. $4/3 \le l \le 12/7 \approx 1.714$:

$$a_1^* + a_2^* = l/2, \ p_1^* = 1 - a_1^*, \ p_2^* = 1 - a_2^*, \ u_1^* = 2a_1^*(1-a_1^*), \ u_2^* = 2a_2^*(1-a_2^*),$$

$$\max\left\{\frac{l}{2} - \frac{3}{7}, \frac{1}{3}\right\} \le a_1^*, a_2^* \le \min\left\{\frac{l}{2} - \frac{1}{3}, \frac{3}{7}\right\}$$

8. $12/7 \le l \le 13/7 \approx 1.857$:

A. $a_1^* = a_2^* = \dfrac{l}{3} - \dfrac{1}{7}, \ p_1^* = p_2^* = \dfrac{4-2l}{3}, \ u_1^* = u_2^* = \dfrac{(2-l)l}{3}$ *(обобщенное)*

B. $a_1^* + a_2^* = \dfrac{l}{2}, \ \dfrac{3}{7} \le a_1^*, a_2^* \le \dfrac{1}{2}, \ 2a_1^* + a_2^* = l - \dfrac{3}{7}, \ a_1^* + 2a_2^* = l - \dfrac{3}{7},$

$$1 - a_1^* \le p_1^* \le 1 - l + a_1^* + 2a_2^*, \ 1 - a_2^* \le p_2^* \le 1 - l + a_2^* + 2a_1^*, \ p_1^* + p_2^* = 2 - d,$$

$u_1^* = 2p_1^*(1-p_1^*), \ u_2^* = 2p_2^*(1-p_2^*)$ *(множественное обобщенное)*

Аналитическое решение игры расположений при эластичном спросе

Институт Проблем Управления РАН

9. $13/7 \le l \le 2$:

A. $2a_i^* + a_{-i}^* = l - \frac{1}{2}$, $p_i^* = \frac{1}{2}$, $p_{-i}^* = 1 - a_{-i}^*$, $u_i^* = \frac{1}{2}$, $u_{-i}^* = 2a_{-i}^*(1 - a_{-i}^*)$,

$\max\left\{\frac{l}{2}, l - \frac{3}{2}\right\} \le a_i^* \le l - \frac{19}{14}$, $\frac{3}{7} \le a_{-i}^* \le \min\left\{\frac{l-1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $i \in \{1,2\}$ *(обобщенное)*

B. $a_1^* + a_2^* \ge \frac{l}{2}$, $\frac{3}{7} \le a_1^*, a_2^* \le \frac{1}{2}$, $2a_1^* + a_2^* = l - \frac{3}{7}$, $a_1^* + 2a_2^* = l - \frac{3}{7}$,

$1 - a_1^* \le p_1^* \le 1 - l + a_1^* + 2a_2^*$, $1 - a_2^* \le p_2^* \le 1 - l + a_2^* + 2a_1^*$, $p_1^* + p_2^* = 2 - d$,

$u_1^* = 2p_1^*(1 - p_1^*)$, $u_2^* = 2p_2^*(1 - p_2^*)$ *(множественное обобщенное)*

10. $l \ge 2$:

A. $a_1^* \ge \frac{l}{2}$, $a_2^* \ge \frac{l}{2}$, $a_1^* + a_2^* \le l - 1$, $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$, $u_1^* = u_2^* = \frac{1}{2}$

B. $2a_i^* + a_{-i}^* = l - \frac{1}{2}$, $p_i^* = \frac{1}{2}$, $p_{-i}^* = 1 - a_{-i}^*$, $u_i^* = \frac{1}{2}$, $u_{-i}^* = 2a_{-i}^*(1 - a_{-i}^*)$,

$\max\left\{\frac{l}{2}, l - \frac{3}{2}\right\} \le a_i^* \le l - \frac{19}{14}$, $\frac{3}{7} \le a_{-i}^* \le \min\left\{\frac{l-1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $i \in \{1,2\}$ *(обобщенное)*

Расположение, цены и выигрыши игрока в симметричных равновесиях 2-шаговой задачи

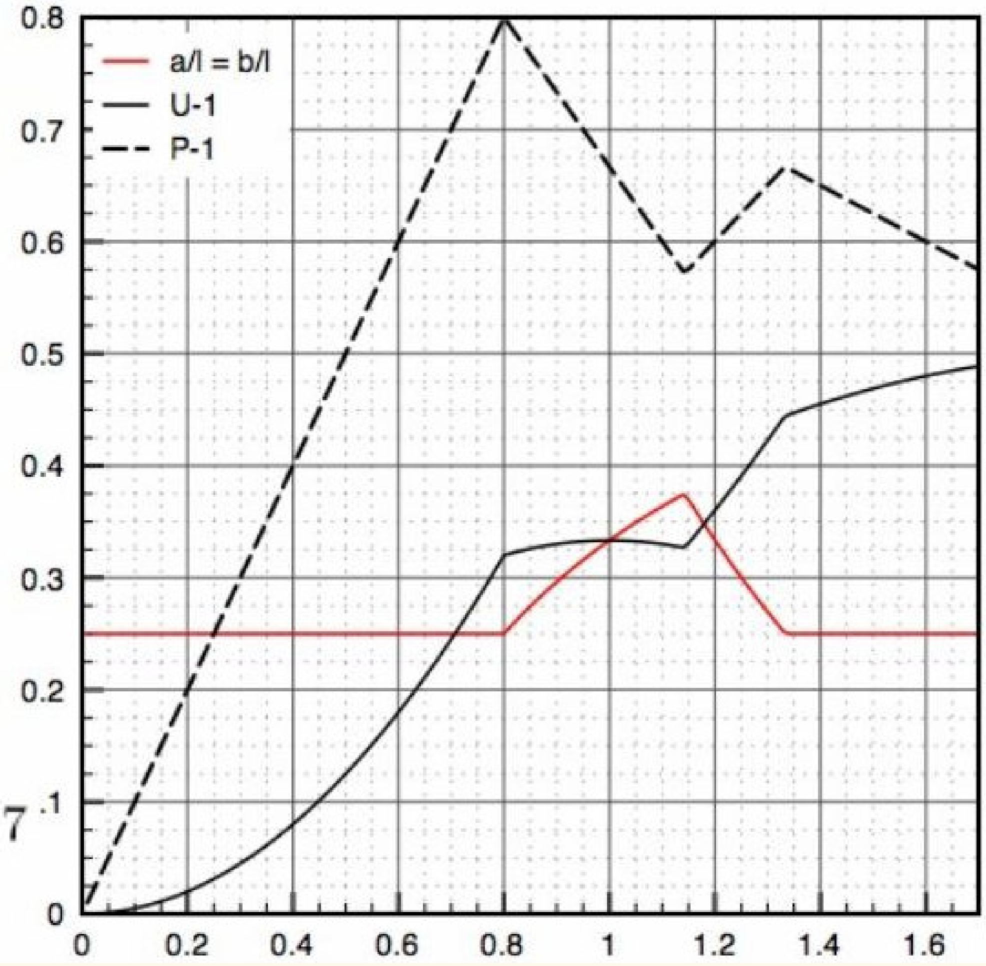
Институт Проблем Управления РАН

1) $a/L = 0.25, \quad p = L,$
$u = L^2/2, \quad L < 0.8$

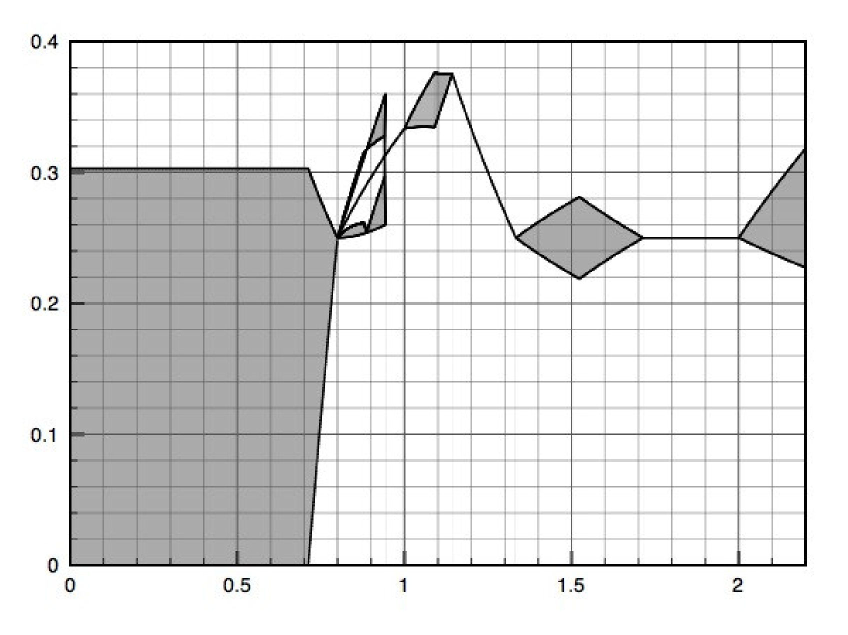
2) $a/L = \frac{2L-1}{3L}, \quad p = \frac{2}{3}(2-L),$
$u = \frac{2-L}{3}\dot{L}, \quad 0.8 \leq L < 8/7$

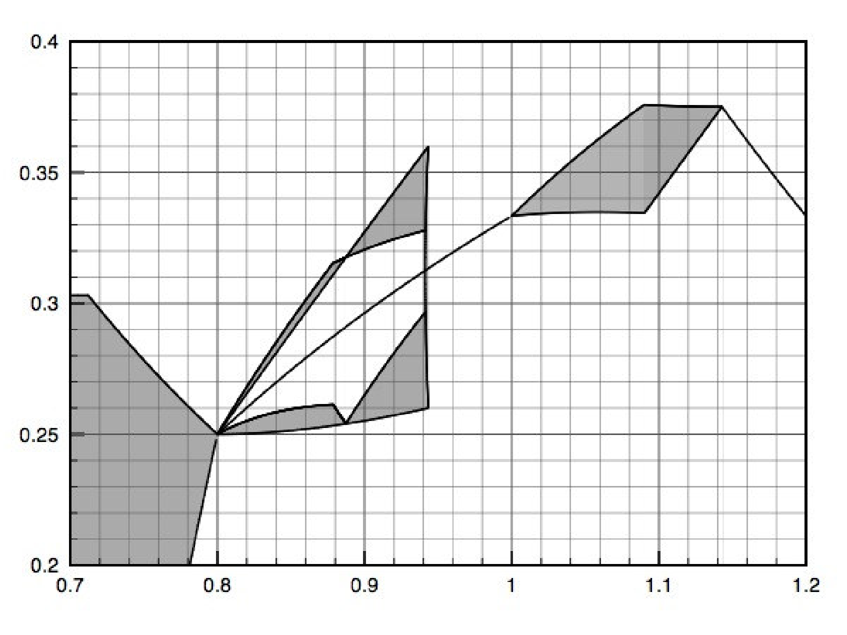
3) $a/L = \frac{2-L}{2L}, \quad p = L/2,$
$u = L^2/4, \quad 8/7 \leq L < 4/3$

4) $a/L = 0.25, \quad p = 1 - 0.25\dot{L},$
$u = \frac{\dot{L}}{2}(1 - 0.25\dot{L}), \quad 4/3 \leq L < 12/7$



Расположение игрока в несимметричных равновесиях 2-шаговой задачи





Итоги исследования и интерпретация

- В основу исследования положен отказ от двух упрощающих предположений Хотеллинга: о неэластичности суммарного спроса и отсутствия ценовых войн.
- Эластичность спроса была введена через условие неотрицательности полезности покупателя.
- Ценовые войны моделировались с помощью РБС.

Итоги исследования и интерпретация

- Полученное решение показало ряд эффектов с важной экономической интерпретацией:
- демпинговые ценовые равновесия;
- ценовые равновесия с разделом сфер влияния;
- естественная граница между стремлением игроков к дифференциации и концентрации (в частном случае как граница между демпинговыми и обычными ценовыми равновесиями);
- сложная качественная картина перехода решения от точечного рынка до неограниченного (на прямой) в зависимости от ключевого параметра – протяженности рынка;
- эффект повышения цен при переходе от монополии одного продавца к дуополии;
- ценовое равновесие высоких цен на внутреннем ограниченном и защищенном рынке, компенсирующим потерю в ходе конкуренции внешнего рынка.

Итоги исследования и интерпретация

Институт Проблем Управления РАН

- Решение получилось весьма громоздким (особенно несимметричные равновесия) , но вполне доступным как аналитическому, так и в особенности численному решению.
- Богатство обнаруженных эффектов открывает перспективу перехода от чисто теоретических моделей к решению прикладных задач моделирования пространственно распределенных рынков.

- Спасибо за внимание