

# Лабораторные занятия по методам вычислений

## Задание № 3:

### Метод простой итерации

**Дано:** матрица  $A$ , вектор  $b$ , точность  $\varepsilon$ .

**Требуется:**

- 1) с помощью правила Якоби привести линейную систему  $Ax = b$  к виду, удобному для итераций  $x = Bx + c$ ;
- 2) используя метод простой итерации, найти приближённое решение  $\tilde{x}$  системы с точностью  $\varepsilon$ ;
- 3) вычислить оценку погрешности  $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty$ ;
- 4) определить вектор невязок  $r = A\tilde{x} - b$ ;
- 5) подсчитать норму  $\|r\|_\infty$ ;
- 6) провести анализ полученных результатов.

#### Примечание 1.

Выбор начального приближения  $x^0$  провести самостоятельно. При этом для сравнительного анализа результатов выполнить метод необходимо с не менее, чем тремя вариантами вектора  $x^0$ :

- 1) выбор произвольный, исходя из условия  $\|x^0\|_1 \approx 10$   
(например,  $x^0 = (2, -6, 3, -1) \Rightarrow \|x^0\|_1 = 12 \approx 10$ );
- 2)  $\|x^0\|_1 \approx 100$ ;
- 3)  $\|x^0\|_1 \approx 1000$ .

## Примечание 2.

**clear all**      первая строка в *m*-файле

$a_{ij} \rightarrow A(i,j)$

```
for счётчик=начало : конец  
    команда1;  
    команда2;  
    ...  
end
```

```
while условие  
    команда1;  
    команда2;  
    ...  
end
```

```
if условие  
    команда1;  
    команда2;  
    ...  
else  
    команда3;  
    команда4;  
    ...  
end
```

**norm** (вектор, тип)      *min*: 1, 2, inf

**norm** (матрица, тип)      *min*: 1, 2, inf

### Примечание 3.

#### Правило Якоби:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + c,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

#### Метод простой итерации:

$x^0 \in R^n$  – начальное приближение (выбрать самостоятельно);

$$\begin{cases} x^{k+1} = Bx^k + c, \\ k = 0, 1, \dots; \end{cases}$$

условие остановки:  $\frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^k - x^{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \tilde{x} = x^k$ .

#### Оценка погрешности приближённого решения ( $\tilde{x} = x^k$ ):

$$\|\tilde{x} - x^*\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|\tilde{x} - x^{k-1}\|_\infty.$$

#### Пример программирования итерационного метода:

$x_0 \in R$  – начальное приближение (выбрать самостоятельно);

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{x_k}{2}, \\ k = 0, 1, \dots; \end{cases}$$

условие остановки:  $|x_k| \leq \varepsilon \Rightarrow \tilde{x} = x_k$ .

```
clear all           % первая строка в m-файле
e=0.001;           % точность
x=5;               % начальное приближение
k=0;               % счётчик итераций
while abs(x)>e     % цикл: пока НЕ выполнено условие остановки
    x=x/2;         % пересчёт приближения
    k=k+1;         % увеличение счётчика
end
x                  % решение
k                  % количество итераций
```

## Варианты задания

1.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0001$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 11 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0002$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 11 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0003$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 11 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & 14 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0004$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0005$$

## Варианты задания

6.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0006$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0007$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 13 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 11 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0008$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0009$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 14 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.001$$

## Варианты задания

11.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 10 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0001$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0002$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 11 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0003$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0004$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 12 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0005$$

## Варианты задания

16.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 13 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 11 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0008$$

17.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 14 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.001$$

18.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0005$$

19.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0002$$

20.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.0006$$