Примерные задачи к зачету по курсу «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1. Будут ли параметризации $\bar{r}(t) = (t,0,0), \quad \bar{r}_1(t) = (t^3,0,0)$ эквивалентны?
2. Дана кривая в R^3 параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(t) = (t^2 - t + 1, \quad t^2 + t + 1, \quad 0)$ будет ли эта кривая регулярной; придумать эквивалентную параметризацию.
3. Составить уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей кривой $x = \sec t, \quad y = tg\, t, \quad z = at, \quad при \;\; t = \pi / 4,$
4. Определить касательный вектор кривой

   1) $\bar{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2)$ при t=1,

   2) $x^2 = 2z,\ y^2 = 2z$ в точке $M_0 = (2, 2, 2).$
5. Определить касательную прямую и нормальную плоскость кривой $\bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ при t=1. Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью xy?
6. Доказать, что нормальные плоскости кривой $\bar{r}(t) = (a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ проходят через начало координат.
7. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой $\bar{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, e^t)$ в точке t=0.
8. Найти длину дуги линии $x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$ между плоскостями $y=1/3a,\ y=9a.$
9. Доказать, что для следующих кривых кривизна и кручение равны:

   1) $x=a\ ch\ t,\ y=a\ sh\ t,\ z=at;$

   2) $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3.$
10. В точке t=0 для винтовой линии $\bar{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ записать уравнения: касательной прямой; главной нормали; бинормали.
11. Найти кривизну и кручение следующих кривой $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t.$
12. Доказать, что кривая плоская, и найти уравнение плоскости,

    в которой расположена данная кривая $\bar{r} = \bar{r}(t) = \left(\dfrac{t+1}{1-t}, \dfrac{1}{1-t^2}, \dfrac{1}{1+t}\right).$

13. Составить уравнение главной нормали и бинормали кривой:

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3 \quad при\ t = 1.$$

14. Определить кривизну линии $\rho = a\ (1 + \cos\varphi)$.

15. На поверхности *x=u+ cos v, y=u- sin v, z=λu* дана точка $M_0(u = 1,\ v = \pi / 2)$. Написать уравнение касательных прямых и нормальных плоскостей к линиям $u = 1,\ v = \pi / 2$ в точке M_0. Найти угол между линиями $u = 1,\ v = \pi / 2$.

16. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности

$x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 - v^3$ в точке $M_0(8,5,7)$.

17. Определить первую квадратичную форму цилиндра $y = x^2$.

18. На поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + sh^2\ u\ dv^2$ найти длину между точками $M_1(u_1, v_1), \quad M_2(u_2, v_2)$.

19. Найти угол между линиями $\gamma_1 : u + v = 0, \quad \gamma_2 : u - v = 0$ на прямом геликоиде.

20. Определить главные кривизны параболоида $z = a\ (x^2 + y^2)$ в точке $M_0(0, 0, 0)$.

21. Найти среднюю и полную кривизну параболоида *z=axy* в точке *x=y=*0.

22. Найдите полную и среднюю кривизну поверхности вращения

$$z = f(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

23. Докажите, что все точки поверхности $x + y = z^3$ параболические.