

**Экзаменационные вопросы по курсу “Алгебра и теория чисел”**  
( «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»)

**Семестр 1:**

1. Дать общие определения алгебраической системы, алгебраической операции и отношения (предиката). Указать основные свойства бинарных операций и привести примеры.
2. Дать определение бинарного отношения. Указать основные свойства бинарных отношений и привести примеры.
3. Дать определение отношения эквивалентности и привести примеры. Свойства классов эквивалентности и фактор-множество по заданной эквивалентности.
4. Алгебра высказываний. Логические операции и их свойства. Отношение логической эквивалентности для сложных высказываний. Законы логики.
5. Алгебра множеств. Операции над множествами и их свойства. Связь алгебры высказываний и алгебры множеств.
6. Аксиомы натурального ряда и метод доказательства на основании принципа математической индукции.
7. Рекурсивные определения операций сложения и умножения в множестве натуральных чисел их свойства.
8. Отношения порядка и делимости в множестве натуральных чисел и их свойства.
9. Теорема о минимальном элементе и теорема о делении с остатком в множестве натуральных чисел.
10. Операции НОД и НОК в множестве натуральных чисел, их свойства. Алгоритм Евклида для нахождения НОДа.
11. Понятие простого числа. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена для выделения простых чисел.
12. Критерий простого числа. Теорема об однозначном разложении чисел на простые сомножители.
13. Понятие целого числа. Отношения равенства и порядка и операции с целыми числами, их свойства.
14. Отношение делимости и операция НОД в кольце целых чисел, их свойства. Теорема о НОДе в кольце целых чисел.
15. Поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Представление рационального числа несократимой дробью. Законы арифметики рациональных чисел. Счетность поля  $\mathbb{Q}$ .
16. Поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Дедекиндовы сечения и представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью. Существование иррациональных чисел.
17. Поле комплексных чисел. Понятие комплексного числа и свойства операций над ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формулы Муавра и Эйлера.
18. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства. Извлечение корней из комплексных чисел.

19. Операция сопряжения в поле комплексных чисел, ее свойства.
20. Определение и примеры полугрупп. Свободные полугруппы и определяющие соотношения.
21. Полугруппа отображений произвольного множества. Инъективные, сюръективные и биективные отображения.
22. Аксиомы и общие свойства групп. Единственность нейтрального и обратного элементов. Свойства операции обращения в группе.
23. Конечные и бесконечные циклические группы и их подгруппы. Порядок элемента в группе, его свойства.
24. Понятие подгруппы в группе. Смежные классы по подгруппе и индекс подгруппы в группе.
25. Нормальные подгруппы в группе. Фактор-группа по нормальной подгруппе.
26. Группа биективных отображений произвольного множества.
27. Группа подстановок  $n$ -й степени. Операции с подстановками. Разложение подстановки в произведение циклов и транспозиций.
28. Понятие четности подстановок. Теорема о четности. Способы определения четности. Группа четных подстановок.
29. Определение и общие свойства колец и полей. Примеры числовых колец и полей. Делители нуля в кольце.
30. Конечные кольца и поля классов вычетов по модулю  $n$ , их свойства.
31. Кольца числовых матриц. Свойства операций над матрицами. Определители числовых матриц и способы их вычисления.
32. Мультипликативная группа ассоциативного кольца с единицей. Критерий обратимости в кольце классов по модулю  $n$  и критерий Обратимости в кольце числовых матриц.
33. Понятие многочлена над произвольным ассоциативным кольцом. Операции над многочленами, их свойства. Деление многочлена на регулярный многочлен.
34. Правые и левые значения многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера для деления многочлена на бином  $(x-c)$ .
35. Теорема о НОДе для многочленов. Алгоритм деления с остатком для нахождения НОДа.
36. Кольцо многочленов над числовым полем, его свойства. Понятие неприводимого многочлена. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители.
37. Корни многочленов, число корней и их кратность. Способы определения кратности корней многочлена.
38. Кольцо многочленов над полем рациональных чисел. Теорема о рациональных корнях многочлена. Критерий неприводимости.
39. Основная теорема о числовых многочленах. Ее следствия. Интерполяционная формула Лагранжа.
40. Кольцо многочленов над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Теорема о корнях многочлена над  $\mathbb{R}$  и теорема о неприводимых многочленах.

## Семестр 2:

1. Действия с прямоугольными матрицами, свойства операций над ними.
2. Кольцо квадратных матриц над полем, его свойства
3. Определители квадратных матриц. Свойства определителей.
4. Определитель произведения двух матриц. Критерий равенства нулю определителя.
5. Методы вычисления определителей.
6. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема об алгебраическом дополнении.
7. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строкам или столбцам.
8. Присоединенная матрица для произвольной квадратной матрицы. Теорема о присоединенной матрице.
9. Критерий существования обратной матрицы и способы её вычисления.
10. Миноры произвольной прямоугольной матрицы. Теорема о базисном миноре.
11. Ранг матрицы и способы его вычисления. Теорема о ранге.
12. Понятие общего и частного решения системы линейных уравнений. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования систем.
13. Критерий совместности системы линейных уравнений.
14. Решение системы уравнений крамеровского типа. Вывод формул Крамера.
15. Метод определителей для решения произвольной системы линейных уравнений.
16. Метод последовательного исключения неизвестных для решения произвольной системы линейных уравнений.
17. Системы однородных линейных уравнений. Критерий существования ненулевых решений однородной системы.
18. Пространство решений однородной системы уравнений, его размерность. Нахождение фундаментальных решений однородной системы.
19. Аксиомы линейного пространства. Линейная зависимость векторов, её свойства. Критерий линейной зависимости векторов.
20. Базис пространства и координаты вектора. Теоремы о базисах и свойства координат.
21. Размерность линейного пространства. Существование пространств произвольной размерности.
22. Изоморфизм линейных пространств. Теорема об изоморфизме пространств.
23. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка множества векторов. Размерность линейной оболочки.
24. Сумма и пересечение подпространств, их размерность. Прямая сумма подпространств.
25. Линейные операторы (определение и примеры). Свойства операций над операторами.
26. Матрица линейного оператора относительно некоторого базиса. Изоморфизм алгебры операторов и алгебры матриц.

27. Область значений, ранг и ядро линейного оператора. Размерность области значений и ядра оператора.
28. Группы невырожденных операторов. Критерии невырожденности операторов.
29. Переход от одного базиса к другому. Преобразование координат вектора и матрицы линейного оператора при изменении базиса.
30. Отношение подобия числовых матриц, его свойства. Критерий подобия. Инварианты преобразования подобия матриц.
31. Характеристическая матрица, характеристический многочлен и спектр оператора.
32. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Теорема о собственных значениях и свойства собственных векторов.
33. Жорданова форма матрицы линейного оператора. Приведение числовой матрицы к жордановой нормальной форме.
34. Вещественное евклидово пространство. Матричная форма записи и свойства скалярного произведения. Неравенство Коши – Буняковского.
35. Нормированные пространства, свойства нормы. Норма вектора и угол между векторами в евклидовом пространстве.
36. Ортогональные системы векторов в евклидовом пространстве, их свойства. Метод ортогонализации произвольной системы векторов.
37. Теорема о существовании ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Метод построения ортонормированного базиса.
38. Билинейные формы в линейном пространстве. Матрица билинейной формы и формула её преобразования при изменении базиса.
39. Симметричные билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
40. Ранг билинейной и квадратичной формы. Закон инерции для вещественных квадратичных форм.
41. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности.